

УДК 519.876.5

Громадченко Т.В.¹, аспірант,
Мартинюк П.М.², к.ф.-м.н., доц.

Математичне моделювання впливу техногенних факторів на розподіл вологи в ґрунті

Побудовано математичну модель процесу вологоперенесення в ґрунтовому середовищі з врахуванням впливу тепла і концентрації сольового розчину у порах ґрунту. Відповідну крайову задачу розв'язано методом скінченних елементів. На чисельних експериментах показано можливість значного впливу техногенних факторів на зміну вологості.

Ключові слова: вологоперенос, метод скінченних елементів, моделювання, тепло-масоперенесення.

¹ Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11, e-mail: Grotan_nuwmnru@ukr.net

² Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11, e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н. Акіменко В.В.

1. Вступ. В теорії руху ґрунтових вод велика увага приділяється вологопереносу. Вивченню руху води у ненасичених ґрунтах та процесам фільтрації у насичених пористих середовищах присвятили свої роботи багато вчених [1-4]. Увага до цих процесів зумовлена можливістю нанесення значної шкоди спорудам в результаті просідання та деформації їх ґрунтових основ, сільському господарству (підтоплення територій), спричиненню зміни рельєфу (зсуви, обвали) та загрози людським життям. Однак всі вищезгадані вчені в якості порової рідини розглядали чисту воду і нехтували впливом температури на зміну вологості ґрунту.

При засоленні відбувається зміна фізико-механічних характеристик ґрунту. При вологоперенесенні солі розчиняються і знижуються міцнісні параметри у ґрунті, а температура може впливати на зміну динаміки цих процесів.

Одним із факторів стійкості ґрунтових укосів та схилів є саме зміна вологості ґрунту, з якого

T. V. Gromadchenko¹, Postgraduate Student,
P. M. Martinyuk², Candidate of Physics and
Mathematics, Associate Professor

Mathematical Modeling of the Impact of Technological Factors on the Soil Moisture Distribution

Mathematical model of soil moisture transfer was built including the impact of the heat and the concentration of salt solution in soil pores. The corresponding boundary value problem was solved by finite element method. With the numerical experiments it is showed the possibility of a significant effect of technological factors on moisture change.

Key Words: moisture transfer, finite element method, modeling, heat and mass transfer.

¹ National University of Water Management and Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str., 11, e-mail: Grotan_nuwmnru@ukr.net

² National University of Water Management and Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str., 11, e-mail: Martinjuk@ukr.net

вони складаються. Дослідження впливу вологоперенесення на стійкість зсувонебезпечних масивів наведено в роботі [5]. Однак там не врахована можливість впливу техногенних факторів на ці процеси. Тому метою даної статті є дослідження впливу процесів тепло- та масопереносу на розподіл вологості в ґрунті.

Математичному моделюванню процесу вологоперенесення в ґрунтових середовищах присвятили роботи [3, 4, 6, 7]. Елементи математичного моделювання впливу тепло-масопереносу на розподіл вологості в ґрунті наведено в роботах [8, 9]. Як відмічено в [8], аналіз фізичних механізмів переносу енергії та речовини в ґрунтах показує, що рух вологи відбувається в основному під впливом градієнтів потенціалу ґрунтової вологи та температури, перерозподіл тепла відбувається в результаті механізмів теплопровідності та переносу тепла рідиною і перенос солей - в результаті механізмів конвективної дифузії та термодифузії. Однак, на нашу думку, на рух вологи в ґрунті також

впливає і хімічний потенціал [10] та нелінійна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей і температури [11].

2. Постановка задачі та її математична модель. Розглянемо двовимірну задачу вологоперенесення у ґрунтовому середовищі, який займає область Ω з межею Γ . Вважаємо, що ґрунт є однорідним та ізотропним за своїми характеристиками. Зміну вологості у ґрунті опишемо рівняннями Річардса [7]. За шукану приймемо функцію насичення пористого середовища

$$s(\mathbf{X}, t) = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}},$$

де $\theta = \frac{V_g}{V}$ - об'ємна вологість; V_g - об'єм порової рідини у виділеному об'ємі V ґрунту; θ_{\min} - залишкова (мінімальна) вологість (або кількість рідини, яка залишається в ґрунті після повного осушення); θ_{\max} - значення максимальної вологості; $\mathbf{X} = (x, z)$. Такий підхід дозволяє розглядати межу розподілу зон повного та неповного насичення внутрішньою і явно не визначати її в процесі розв'язання задачі. Ця ідея була використана в [6]. У випадку двофазного пористого середовища (відсутня газова складова) $\theta_{\max} = n$, де n - пористість ґрунту. Тому справедливо $0 \leq \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} = n$.

Математичну модель досліджуваного процесу в умовах тепло-масопереносу можна описати наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (D(s, c, T) \nabla s) - (\nabla \cdot (k(s, c, T) \nabla z) + \nabla \cdot (\mu \nabla T) + \nabla \cdot (v \nabla c)) \frac{1}{n - \theta_{\min}}; \quad (1)$$

$$(s(n - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c(s, c, T) \nabla c) + \nabla \cdot (D_T(s, c, T) \nabla T) - \mathbf{q}_s \nabla c - \gamma_m (c - C_m); \quad (2)$$

$$C_{ef} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_{ef} \nabla T) - \rho C_p \mathbf{q}_s \nabla T; \quad (3)$$

$$\mathbf{q}_s = -((n - \theta_{\min}) D(s, c, T) \nabla s - k(s, c, T) \nabla z) + v(c) \nabla c + \mu \nabla T; \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_c = c \mathbf{q}_s - D \nabla c - D_T \nabla T; \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho C_p T \mathbf{q}_s - \lambda_{ef} \nabla T; \quad (6)$$

$$(\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(s)}} = 0; s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(s)}} = s_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(s)}; \quad (7)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0; c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(c)}} = c_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}; \quad (8)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0; T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}; \quad (9)$$

$$s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = c_0(\mathbf{X}), \quad (10)$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega};$$

$$\Gamma_1^{(s)} \cup \Gamma_2^{(s)} = \Gamma_1^{(c)} \cup \Gamma_2^{(c)} = \Gamma_1^{(T)} \cup \Gamma_2^{(T)} = \Gamma,$$

$$\Gamma_1^{(s)} \cap \Gamma_2^{(s)} = \emptyset, \Gamma_1^{(c)} \cap \Gamma_2^{(c)} = \emptyset, \Gamma_1^{(T)} \cap \Gamma_2^{(T)} = \emptyset.$$

Рівняння (1) описує процес вологопереносу в масиві ґрунту Ω в умовах тепло-масопереносу. Рівняння (2), (3) описують сольовий та тепловий режими відповідно. Тут: $D(s, c, T)$ - нелінійний коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи; $\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_T$ - питомі потоки ґрунтової вологи, розчинених солей і тепла відповідно; $k(s, c, T)$ - коефіцієнт фільтрації у випадку насиченого ґрунту і гідравлічна провідність при неповній насиченості ґрунту; μ, v - коефіцієнти термічного та хімічного осмосу при повній насиченості та коефіцієнти термічної та хімічної дифузії ґрунтової вологи для зони неповного насичення [10]; T - температура середовища; λ_{ef} - коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ - густина порового розчину; C_p - питома теплоємність порового розчину; c - концентрація сольового розчину; $D_c(s, c, T)$ - коефіцієнт конвективної дифузії; $D_T(s, c, T)$ - коефіцієнт термодифузії розчинених речовин; γ_m - коефіцієнт масообміну; C_m - концентрація граничного насичення; C_{ef} - ефективна об'ємна теплоємність ґрунту; $s_0(\mathbf{X}), c_0(\mathbf{X}), T_0(\mathbf{X}), s_1(\mathbf{X}, t), c_1(\mathbf{X}, t), T_1(\mathbf{X}, t)$ - задані функції.

Для визначення нелінійних функцій $D(s, c, T)$ та $k(s, c, T)$ можна використати наступні емпіричні залежності:

1. Модель BC (R. H. Brooks and A. T. Corey model [7]):

$$k(s, c, T) = K_0(c, T) \cdot s^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}},$$

$$D(s, c, T) = D_0 s^{2+\frac{1}{\lambda}},$$

$$D_0 = -\frac{K_0(c, T) \psi_b}{\lambda(\theta_{\max} - \theta_{\min})},$$

де $K_0(c, T)$ - коефіцієнт фільтрації [12]; λ - характеристичний параметр розподілу розміру пор ґрунту; ψ_b - тиск повітря у ґрунті. Зауважимо, що ψ_b є від'ємним, тому D_0 і $D(s, c, T)$ будуть додатними.

2. Модель MvG (Mualem-Van Genuchten model [7]):

$$k(s, c, T) = K_0(c, T) \cdot \sqrt{s} [1 - (1 - s^{c/\lambda})^2]^2,$$

$$D(s, c, T) = D_0 \frac{\left[1 - \left(1 - s^{\frac{r}{\lambda}} \right)^{\frac{\lambda}{r}} \right]^2 \left(1 - s^{\frac{r}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{r}-1}}{s^{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}}},$$

де r - емпіричний параметр. Існують також інші залежності для коефіцієнтів дифузії та гідралічної провідності, деякі з яких наведено в [12].

Крайова задача (1)-(10) є нелінійною. Тому знайти її аналітичний розв'язок неможливо. Великої популярності серед чисельних методів розв'язання крайових задач здобув метод скінченних елементів (МСЕ) [11, 13, 14]. Саме тому його і було використано при знаходженні чисельних розв'язків відповідної крайової задачі. Проте, враховуючи наявність в рівняннях (2), (3) членів конвективного переносу, потрібно застосовувати стабілізаційні схеми МСЕ [13].

3. Чисельне розв'язування задачі. Нехай замикання $\bar{\Omega}$ області Ω покрите скінченноелементною сіткою, яка налічує n вузлів. Визначимо наступні множини номерів вузлів:

$$\begin{aligned} \omega &= \{j : \mathbf{X}_j = (x_j, z_j) \in \Omega\}, \\ \gamma_1^{(S)} &= \{j : \mathbf{X}_j = (x_j, z_j) \in \Gamma_1^{(S)}\}, \\ \gamma_2^{(S)} &= \{j : \mathbf{X}_j = (x_j, z_j) \in \Gamma_2^{(S)}\}, \\ \omega \cup \gamma_1^{(S)} \cup \gamma_2^{(S)} &= \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Аналогічно визначаються множини $\gamma_1^{(C)}, \gamma_1^{(T)}, \gamma_2^{(C)}, \gamma_2^{(T)}$.

Наближений узагальнений розв'язок задачі (1) - (10) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} s_n(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j \in \omega \cup \gamma_2^{(S)}} c_j^{(S)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}) + W^{(S)}(\mathbf{X}, t); \\ c_n(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j \in \omega \cup \gamma_2^{(C)}} c_j^{(C)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}) + W^{(C)}(\mathbf{X}, t); \\ T_n(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j \in \omega \cup \gamma_2^{(T)}} c_j^{(T)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}) + W^{(T)}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \quad (11)$$

де $\varphi_j(\mathbf{X})$ - базисні функції МСЕ, що визначені для кожного вузла; $c_j^{(S)}(t), c_j^{(C)}(t), c_j^{(T)}(t)$ - невідомі коефіцієнти, що залежать від часу; $W^{(S)}(\mathbf{X}, t), W^{(C)}(\mathbf{X}, t), W^{(T)}(\mathbf{X}, t)$ - деякі відомі функції такі, що $W^{(S)}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = s_1(\mathbf{X}, t)$, $W^{(C)}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = c_1(\mathbf{X}, t)$, $W^{(T)}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = T_1(\mathbf{X}, t)$ [14].

Функції $W^{(S)}(\mathbf{X}, t), W^{(C)}(\mathbf{X}, t), W^{(T)}(\mathbf{X}, t)$ апроксимуються, використовуючи множини

номерів вузлів $\gamma_1^{(S)}, \gamma_1^{(C)}, \gamma_1^{(T)}$ та самі базисні функції МСЕ. Тоді

$$\begin{aligned} W^{(S)}(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j \in \gamma_1^{(S)}} c_j^{(S)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}); \\ W^{(C)}(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j \in \gamma_1^{(C)}} c_j^{(C)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}); \\ W^{(T)}(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j \in \gamma_1^{(T)}} c_j^{(T)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (11), отримуємо

$$\begin{aligned} s_n(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j=1}^n c_j^{(S)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}); \quad c_n(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^n c_j^{(C)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}); \\ T_n(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j=1}^n c_j^{(T)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Використовуючи стандартну процедуру [11, 14], а для стабілізації числових розв'язків рівнянь (2), (3) протипотокову схему Петрова-Гальоркіна [13], отримуємо наступну задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь стосовно векторів невідомих $\mathbf{S}(t) = \{c_j^{(S)}(t)\}_{j=1}^n$,

$$\mathbf{C}(t) = \{c_j^{(C)}(t)\}_{j=1}^n, \quad \mathbf{T}(t) = \{c_j^{(T)}(t)\}_{j=1}^n;$$

$$\mathbf{A}^{(T)} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(T)}(\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(T)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(C)} \frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(C)}(\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C}(t) &= \\ &= \mathbf{F}^{(C)} + \mathbf{G}^{(C)} \cdot \mathbf{T}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(S)} \frac{d\mathbf{S}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(S)}(\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S}(t) &= \\ &= \mathbf{F}^{(S)} + \mathbf{G}^{(S)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(S)} \cdot \mathbf{C}(t), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}^{(T)} \cdot \mathbf{T}(0) &= \tilde{\mathbf{F}}^{(T)}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{(C)} \cdot \mathbf{C}(0) = \tilde{\mathbf{F}}^{(C)}, \\ \tilde{\mathbf{A}}^{(S)} \cdot \mathbf{S}(0) &= \tilde{\mathbf{F}}^{(S)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}^{(T)} = \{a_{ij}^{(T)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \mathbf{L}^{(T)} = \{l_{ij}^{(T)}\}_{i=1; j=1}^{n; n},$$

$$\mathbf{F}^{(T)} = (f_1^{(T)}, \dots, f_n^{(T)})^T, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{(T)} = \{\tilde{a}_{ij}^{(T)}\}_{i=1; j=1}^{n; n},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(T)} = (\tilde{f}_1^{(T)}, \dots, \tilde{f}_n^{(T)})^T, \quad \mathbf{A}^{(C)} = \{a_{ij}^{(C)}\}_{i=1; j=1}^{n; n},$$

$$\mathbf{L}^{(C)} = \{l_{ij}^{(C)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \mathbf{F}^{(C)} = (f_1^{(C)}, \dots, f_n^{(C)})^T,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(C)} = \{\tilde{a}_{ij}^{(C)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(C)} = (\tilde{f}_1^{(C)}, \dots, \tilde{f}_n^{(C)})^T,$$

$$\mathbf{G}^{(C)} = \{g_{ij}^{(C)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \mathbf{A}^{(S)} = \{a_{ij}^{(S)}\}_{i=1; j=1}^{n; n},$$

$$\mathbf{L}^{(S)} = \{l_{ij}^{(S)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \mathbf{F}^{(S)} = (f_1^{(S)}, \dots, f_n^{(S)})^T,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(S)} = \{\tilde{a}_{ij}^{(S)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(S)} = (\tilde{f}_1^{(S)}, \dots, \tilde{f}_n^{(S)})^T,$$

$$\mathbf{G}^{(S)} = \{g_{ij}^{(S)}\}_{i=1; j=1}^{n; n}, \quad \mathbf{M}^{(S)} = \{m_{ij}^{(S)}\}_{i=1; j=1}^{n; n},$$

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^{(T)} &= \iint_{\Omega} C_{ef} \varphi_j \varphi_i dx dz + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} C_{ef} \rho C_{\rho} \varphi_j \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz, \\
 l_{ij}^{(T)} &= \iint_{\Omega} \lambda_{ef} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx dz + \iint_{\Omega} \rho C_{\rho} \mathbf{q}_S \nabla \varphi_j \varphi_i dx dz + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \left[(\rho C_{\rho})^2 \iint_{\Omega_e} (\mathbf{q}_S)^2 \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx dz - \right. \\
 &\left. - \rho C_{\rho} \iint_{\Omega_e} \nabla \cdot (\lambda_{ef} \nabla \varphi_j) \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz \right], \\
 f_i^{(T)} &= 0, \quad \tilde{f}_i^{(T)} = \iint_{\Omega} T_0(x, z) \varphi_i dx dz, \\
 \tilde{a}_{ij}^{(T)} &= \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dz, \quad a_{ij}^{(S)} = \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dz, \\
 a_{ij}^{(C)} &= \iint_{\Omega} (s(n - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) \varphi_j \varphi_i dx dz + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(C)} \iint_{\Omega_e} (s(n - \theta_{\min}) + \theta_{\min}) \varphi_j \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz, \\
 l_{ij}^{(C)} &= \iint_{\Omega} D_C \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx dz + \iint_{\Omega} \mathbf{q}_S \nabla \varphi_j \varphi_i dx dz + \\
 &+ \gamma_m \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dz + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(C)} \left[\iint_{\Omega_e} \nabla \varphi_j (\mathbf{q}_S)^2 \nabla \varphi_i dx dz - \right. \\
 &\left. - \iint_{\Omega_e} \nabla \cdot (D_C \nabla \varphi_j) \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz + \gamma_m \iint_{\Omega_e} \varphi_j \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz \right], \\
 f_i^{(C)} &= \iint_{\Omega} C_m \gamma_m \varphi_i dx dz + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(C)} \iint_{\Omega_e} C_m \gamma_m \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz, \\
 \tilde{f}_i^{(C)} &= \iint_{\Omega} C_0(x, z) \varphi_i dx dz, \quad \tilde{a}_{ij}^{(C)} = \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dz, \\
 g_{ij}^{(C)} &= - \iint_{\Omega} D_T \nabla T \nabla \varphi_i dx dz + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(C)} \iint_{\Omega_e} \nabla \cdot (D_T \nabla T) \mathbf{q}_S \nabla \varphi_i dx dz, \\
 l_{ij}^{(S)} &= \iint_{\Omega} D(s, c, T) \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx dz + \\
 &+ \frac{1}{n - \theta_{\min}} \iint_{\Omega} \frac{\partial k(s, c, T)}{\partial s} \nabla \varphi_j \nabla z \varphi_i dx dz, \quad f_i^{(S)} = 0, \\
 \tilde{a}_{ij}^{(S)} &= \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dz, \quad g_{ij}^{(S)} = - \frac{1}{n - \theta_{\min}} \iint_{\Omega} \left(\mu \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i + \right. \\
 &\left. + \frac{\partial k(s, c, T)}{\partial T} \nabla \varphi_j \nabla z \varphi_i \right) dx dz, \\
 m_{ij}^{(S)} &= \frac{1}{n - \theta_{\min}} \iint_{\Omega} \left(\nu \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i + \right. \\
 &\left. + \frac{\partial k(s, c, T)}{\partial c} \nabla \varphi_j \nabla z \varphi_i \right) dx dz, \quad \tilde{f}_i^{(S)} = \iint_{\Omega} s_0(x, z) \varphi_i dx dz.
 \end{aligned}$$

Параметри регуляризації для рівнянь (2), (3) вибиралися наступними згідно [13]:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho C_{\rho} \mathbf{q}_S\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_T), \quad \tau_e^{(C)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{q}_S\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_c),$$

де $a = 3$, $\gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & 1 \leq z \leq \infty; \end{cases}$ $Pe_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\mathbf{q}_S\|_{\infty, e}}{\|D_c\|_{\infty, e}}$,

$$Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho C_{\rho} \mathbf{q}_S\|_{\infty, e}}{\|\lambda_{ef}\|_{\infty, e}}, \quad \|\bullet\|_{\infty, e} - \text{рівномірна норма.}$$

Наближений розв'язок задачі Коші (13) – (16) можна знайти, наприклад, за допомогою повністю неявної різницевої схеми, лінійної відносно шуканих функцій [15]. Для прикладу покажемо дискретизацію в часі системи (13), яка відповідає рівнянню теплопереносу:

$$\mathbf{A}^{(T)}(\mathbf{S}^{(k)}) \frac{\mathbf{T}^{(k+1)} - \mathbf{T}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(T)}(\mathbf{S}^{(k)}, \mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \cdot \mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(T)(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

де k - відповідний часовий шар; m - кількість часових шарів.

4. Результати чисельних експериментів.

Для в'яснення ступеня впливу тепло-масопереносу на процес розподілу вологи, була проведена серія чисельних експериментів. Розглядався масив ґрунту у вигляді схилу, показаний на рис. 1. Координати точок межі області поклалися наступними: $A(0; 22)$, $B(0; 2)$, $C(20; 4)$, $D(30; 14)$, $E(40; 16)$, $F(40; 24)$. Розмірність визначається в метрах. Границя $\Gamma_1^{(S)} = BC \cup CD \cup DE$ знаходиться під впливом інтенсивних атмосферних опадів у вигляді дощу, тобто постійно змочується. На початковому етапі ґрунт на схилі вважався сухим.

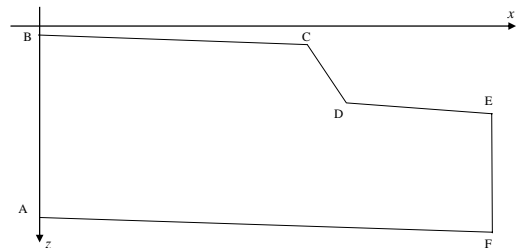


Рис. 1. Досліджувана область

Використовувались наступні вихідні дані:

$$\begin{aligned}
 D_1 = D_2 &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 / \text{доба}, \quad \gamma_m = 0 \text{ доба}^{-1}, \\
 D_{T_1} = D_{T_2} &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ кж} / ^\circ\text{C} \cdot \text{доба} \cdot \text{м},
 \end{aligned}$$

$$c_\rho = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}, c_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{доба}}, \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\mu = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / ^\circ\text{C} \cdot \text{доба},$$

$$v = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}, C_m = C_{\max} = 160 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$C_{\min} = 8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, T_{\max} = 30 ^\circ\text{C}, T_{\min} = 10 ^\circ\text{C}.$$

Для експериментів враховувались такі граничні

$$(\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{AB \cup EF \cup AF} = 0; s(\mathbf{X}, t)|_{BC \cup CD \cup DE} = 1;$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB \cup CD \cup DE \cup EF \cup AF} = 0; c(\mathbf{X}, t)|_{BC} = C_{\max};$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{AB \cup EF \cup AF} = 0; T(\mathbf{X}, t)|_{BC \cup CD \cup DE} = T_{\max}$$

та початкові умови

$$T_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} T_{\max}, & \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(S)}; \\ T_{\min}, & \mathbf{X} \notin \Gamma_1^{(S)}; \end{cases} c_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} c_{\max}, & \mathbf{X} \in BC; \\ c_{\min}, & \mathbf{X} \notin BC; \end{cases}$$

$$s_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(S)}; \\ 0.6, & \mathbf{X} \notin \Gamma_1^{(S)}. \end{cases}$$

Параметри вологопереносу визначались згідно моделі ВС для пісковиків [16]

$$\bar{K}_0 = 1.08 \frac{\text{м}}{\text{добу}}; \theta_{\max} = 0.250; \theta_{\min} = 0.153;$$

$$\lambda = 8.4; \psi_b = -1.27 \text{ м}.$$

Тут \bar{K}_0 - коефіцієнт фільтрації у випадку чистої води та при температурі 20°C . Залежність $k_0 = k_0(c, T)$ апроксимувалась методом радіальних базисних функцій за експериментальними даними, наведеними в [17].

Область покривалась трикутними скінченними квадратичними елементами. Кількість вузлів у скінченних елементах – 3491, кількість скінченних елементів – 1684. Середня довжина сторони одного скінченного елемента приблизно дорівнює 0,9 м. Крок по часу $\tau = 0.1$ доба.

Результати чисельних експериментів в графічному вигляді представлені на рис. 2 - 6.

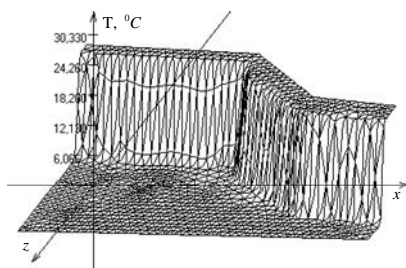


Рис.2. Графік розподілу температури при t=3 доби

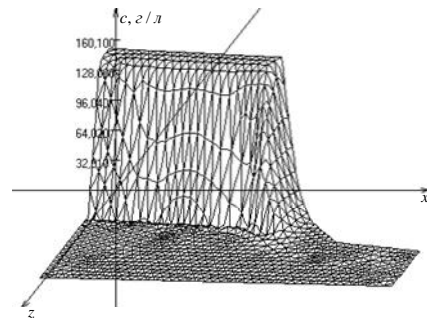


Рис.3. Графік розподілу концентрації солей при t=3 доби

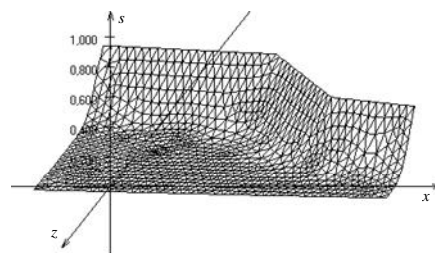


Рис.4. Графік розподілу насичення при t=3 доби

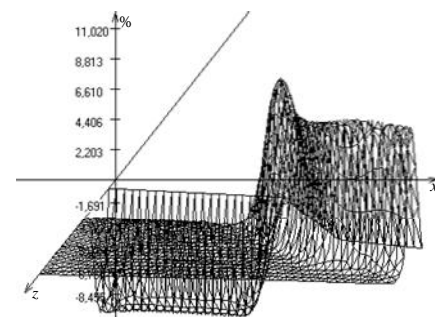


Рис. 5. Графік різниці розподілу вологості з урахуванням та без урахування впливу тепло-масопереносу при $C_{\max} = 160 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

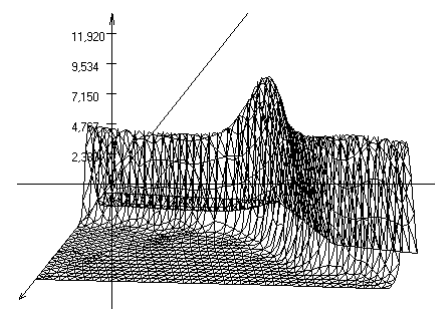


Рис. 6. Графік різниці розподілу вологості з урахуванням та без урахування впливу тепло-масопереносу при $C_{\max} = 50 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

5. Висновки. На рис. 5, 6 можна побачити, що процеси тепло- та масопереносу суттєво впливають на розподіл вологості у ґрунтовому масиві. Різниця при врахуванні та неврахуванні даних факторів досягає подекуди 12 %. А

оскільки на сьогодні важливе місце займають процеси глобального потепління та антропогенний вплив людини на природу, зокрема забруднення промисловими відходами ґрунтів, підземних і надземних вод, то важливо враховувати вплив таких факторів як для будівель і споруд, що вже експлуатуються, так і для таких, що знаходяться на етапі будівництва. Однак вплив забруднень на розподіл вологи не є однозначним, бо процеси вологопереносу можуть як прискорюватися (див. рис. 6), так і сповільнюватися (див. рис. 5) у цьому випадку. А

при зростанні температури процес зволоження пористого середовища однозначно пришвидшується.

Отже, в даній роботі запропонована математична модель переносу ґрунтової вологи з урахуванням техногенних факторів і відповідна крайова задача розв'язана методом скінченних елементів. Подальші дослідження будуть стосуватися врахування впливу рівня ґрунтових вод на розподіл вологи у ґрунті, а також стійкості ґрунтових масивів при таких умовах.

Список використаних джерел

1. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Theory of groundwater movement. – Moscow: Nauka, 1977. – 664 p. (in Russian).
2. *Ivanov P.L.* Soils and foundation of hydrotechnical constructions. Soil mechanics. – Moscow: Vyshaya shkola, 1991. – 447 p. (in Russian).
3. *Delleur J.W.* The Handbook of Groundwater Engineering – CRC Press LLC, 1999. – 940 p.
4. *Marinoschi G.* Functional Approach to Nonlinear Models of Water Flow in Soils. – Springer, 2006. – 324 p.
5. *Gromadchenko T.V., Martiniuk P.M.* Mathematical modeling of the dry soil wetting as a result of damage of the non-pressure aqueduct // Visn. of OSABA. – 2012. – N 48. – P. 103-111. (in Ukrainian).
6. *Vabishchevich P.N., Daniyarov A.O.* Mathematical modeling of the aeration zone wetting in case of close groundwater // Mathematical Modeling. – 1994. – N 11. – P. 11-24. (in Russian).
7. *Caputo J.-G., Stepanyants Y.A.* Front Solutions of Richards' Equation. // Transport in Porous Media. – 2007. – V. 74, Issue 1. – P. 1-20.
8. *Rex L.M., Rex I.S., Yakirevich A.M.* Calculation of moisture and heat transfer in soil (one-dimensional problem) // GFAP №P003456. – Moscow, 1978. (in Russian).
9. *Globus A.M.* Physics of nonisothermal subsurface water exchange. – L.:Hidrometeoizdat, 1983. – 279 p. (in Russian).
10. *Soler Josep M.* Coupled Transport Phenomena in the Opalinus Clay: Implications for Radionuclide Transport // Journal of Contaminant Hydrology. – 2001. – V. 53. – P. 63-84.
11. *Vlasyuk A.P., Martiniuk P.M.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. – Rivne: NUVGP, 2008. – 416 p. (in Ukrainian).
12. *Feike J. Leij, Walter B. Russell, Scott M. Lesch* Closed Form Expressions for Water Retention and Conductivity Data // Ground Water. – 1997. – Vol. 35, No 5. – P. 848 – 858.
13. *Savula Ya.G., Shynkarenko O.G.* Numerical solution stabilization of variational problem of contaminants migration: streamline upwind scheme // Visn. Lviv. Un-ty. Ser. Meh.-Mat. – 1997. – N 46. – P. 3-9. (in Ukrainian).
14. *Sergienko I.V., Skopetskiy V.V., Deineka V.S.* Mathematical modeling and processes investigation in heterogeneous environments. – Kyiv: Nauk. Dumka, 1991. – 432 p. (in Russian).
15. *Samarskiy A.A., Gulin A.V.* Numerical methods of mathematical physics. – Moscow: Nauchnyi Mir, 2003. – 316 p. (in Russian).
16. *Van Genuchten M.Th.* A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils // Soil Science Society of America Journal. – 1980. – Vol. 44, № 5. – P. 892 – 898.
17. *Vlasyuk A.P., Martiniuk P.M.* Numerical solution of consolidation problems and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method. – Rivne: NUVGP, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 26.12.12