УДК 519.87

Ивохин Е.В., д.ф.-м.н, доцент,
Алмодарс Баррак Субхи Камл, аспирант

Об одном подходе к решению задач линейного программирования с нечеткими ограничениями

В статье рассмотрена и решена задача линейного программирования с нечеткими ресурсами, которые задаются в виде нечетких чисел с линейной функцией принадлежности. Предложены два метода оптимизации, приведены примеры решения нечетких задач линейного программирования с нечеткими ограничениями.

Ключевые слова: задача линейного программирования, нечеткое множество, нечеткое число, метод решения ЗЛП с нечеткими ограничениями

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua, burraq_1978@yahoo.com

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor,
Almodars Barrak Subhi Kaml, post-graduate

On approach for the solving of the linear programming problem with fuzzy constraints

In this paper linear programming problem in which resources are fuzzy numbers with linear membership function was studied and solved. Two methods of optimization were request for this task. Some examples of fuzzy linear programming problem solving were given.

Key words: linear programming problem, fuzzy set, fuzzy number, method of solving of linear programming problem with fuzzy constraints

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Статью представил доктор технических наук, проф. Волошин А.Ф.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача линейного программирования (ЗЛП) возникает из необходимости оптимально использовать имеющиеся ресурсы. Это задачи, связанные с целевым выбором и анализом решений; задачи разработки или совершенствования структур (производственных структур предприятий и объединений); задачи проектирования (проектирование сложных автоматизированных комплексов, гибких производственных систем).

В качестве конкретных примеров задач, которые относятся к области линейного программирования, можно назвать задачу об использовании сырья, задачу об использовании мощностей, задачу на составление оптимальной производственной программы.

Рассмотрим следующую практическую задачу планирования производства на фирме. Пусть некоторая производственная фирма планирует выпуск различных изделий $x_1,...,x_n$ на текущий период (квартал или год). Обозначим через c_j ожидаемую прибыль на единицу реализованной продукции типа $j, j=\overline{1,n}$. Для производства любого из изделий используются ресурсы $b_1,...,b_m$ – производственные мощности фирмы, причем удельные расходы i–го ресурса, $i=\overline{1,m}$, при производстве единицы продукции типа j, $j=\overline{1,n}$ составляют a_{ij} единиц. Необходимо найти такой рациональный план выпуска изделий каждого типа, который обеспечивает максимальную прибыль фирмы. Математическая модель этой задачи следующая:

$$max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\,, \quad i=\overline{1,m}\,, \tag{2}$$

$x \ge 0; x \in R^n$.

Эта задача при фиксированных известных значениях параметров c_j, a_{ij}, $j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$, является стандартной задачей линейного программирования, а когда они являются случайными величинами с известными функциями распределения $F(c_j)$, $F(a_{ij})$, ее можно решить методами стохастичного программирования. Однако на практике бывает, что эти параметры неизвестны и для параметров c_j, a_{ij} можно только указать интервал возможных значений. Задачу такого типа можно назвать задачей с множественными значениями коэффициентов. В рамках этой задачи не имеет смысла говорить о максимизации целевой функции, поскольку значения этой функции – не числа, а множества чисел. В этом случае необходимо выяснить, какое отношение предпочтения во множестве альтернатив порождает эта функция, а затем определить, какие изделия следует считать рациональными в смысле этого отношения предпочтения.

Следующим этапом на пути детализации и уточнения рассматриваемой здесь модели является описание параметров задачи в форме нечетких множеств. В модель вводится дополнительная информация в виде функции принадлежности этих нечетких множеств. Эти функции можно рассматривать как способ приближенного отражения экспертом имеющегося у него неформализованного представления о реальной величине данного параметра. Значения функций принадлежности – это весовые коэффициенты, которые эксперты приписывают различным возможным значениям этого параметра.

После такого уточнения можно перейти к следующей постановке задачи нечеткого математического программирования [1]. Задана линейная модель вида

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \to \max , \tag{3}$$

в которой значения коэффициентов $\tilde{c}_j$ заданы нечетко в форме нечетких множеств заданных универсальных множеств. Кроме того, заданы ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i , \quad i = \overline{1,m} , \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} , \tag{4}$$

причем значения коэффициентов $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ также описаны в форме соответствующих нечетких множеств. Требуется осуществить рациональный выбор решения $x \in R^n$, которое в некотором смысле максимизирует заданную нечетко линейную форму.

2. СПОСОБЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Понятие нечеткого множества, сформулированное Л.Заде[2], предполагает рассмотрение множеств, каждый элемент которых может иметь некоторую степень принадлежности соответствующему множеству, причем промежуточную между полной принадлежностью и полной непринадлежностью.

В соответствии с идеей Заде [2], нечеткое множество заданного универсального множества X формулируется следующим образом.

Определение 1. Нечетким множеством $\tilde{A}$ универсального множества X, называется совокупность пар $\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$, где $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ – отображение множества X в единичный отрезок [0,1], называющееся функцией принадлежности нечеткому множеству.

Величина функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для элемента $x \in X$ называется степенью принадлежности. Интерпретацией степени принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ есть субъективная мера того, насколько элемент $x \in X$ соответствует понятию, смысл которого формализован нечетким множеством $\tilde{A}$. Для сравнения, в классической теории множеств принадлежность элемента x некоторому множеству $\tilde{A}$ можно записать в виде:

$$x \in A \text{ или } x \notin A .$$

По аналогии с обычными множествами для нечетких множеств рассматриваются различные операции и свойства. Традиционные операции дополнения, пересечения и объединения в случае нечетких множеств определяются следующим образом:

- дополнением нечеткого множества $\tilde{A}$, которое обозначается как $\tilde{A}^c$, является нечеткое множество, для которого

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X.$$

- пересечением двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называют нечеткое множество $\tilde{C}$, для которого

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X.$$

- объединением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называют нечеткое множество $\tilde{C}$, для которого

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X.$$

- нечеткое множество $\tilde{A}$ называют пустым, если $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0, \forall x \in X.$

Множествами α –уровня (α –срезами), $\alpha \in [0,1]$, нечеткого множества $\tilde{A}$ называют обычные множества

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1].$$

Множество $\operatorname{supp} \widetilde{A} = \{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$ называют носителем нечеткого множества $\widetilde{A}$.

Для понятий выпуклости и нормальности нечетких множеств используются следующие определения.

Определение 2. Нечеткое множество $\widetilde{A}$ называется выпуклым, если

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y))$$

для всех $x, y \in X, \lambda \in [0,1]$.

Определение 3. Нечеткое множество $\widetilde{A}$ называется нормальным, если существует по крайней мере одно значение $x \in X$, для которого $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$.

В прикладных задачах при формализации нечеткости для конструктивности используются другие определения нечеткого множества, эквивалентные классическому определению 1.

Рассмотрим в качестве универсального множества X пространство над полем действительных чисел R^1, т.е. $X = R^1$.

Определение 4. [3] Нечетким числом называется упорядоченная пара функций $(u(r), v(r))$, $r \in [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям

1. $u(r)$ ограниченная, непрерывная слева, неубывающая функция на $[0,1]$;
2. $v(r)$ ограниченная, непрерывная слева, невозрастающая функция на $[0,1]$;
3. $u(r) \leq v(r)$, $r \in [0,1]$.

При этом, произвольное четкое число *a* представляется в виде нечеткого числа, у которого $u(r) = v(r) = a$, $r \in [0,1]$, и для любых двух нечетких чисел $x = (u_1(r), v_1(r))$, $y = (u_2(r), v_2(r))$ и $\lambda \in R$ можно определить арифметические операции и отношения в виде

- $x = y$, если $u_1(r) = u_2(r)$ и $v_1(r) = v_2(r)$, $r \in [0,1]$;
- $x + y = (u_1(r) + u_2(r), v_1(r) + v_2(r))$, $r \in [0,1]$;
- $x - y = (u_1(r) - v_2(r), v_1(r) - u_2(r))$, $r \in [0,1]$;
- $\lambda x = \begin{cases} (\lambda u_1(r), \lambda v_1(r)), \lambda > 0, \\ (\lambda v_1(r), \lambda u_1(r)), \lambda < 0. \end{cases}$

Предположим далее, что любое множество $\widetilde{A}$, принадлежащее совокупности нечетких множеств $K_X(\widetilde{A})$ универсального множества $X = R^1$, является нормальным и выпуклым.

Определение 5. [4] Нечетким треугольным числом $\widetilde{A}$ называется упорядоченная тройка чисел *(a, b, c)*, определяющих функцию принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ вида:

1. $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \dfrac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]$;
2. $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \dfrac{c-x}{c-b}, x \in [b,c]$;
3. $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x \notin [a,c]$.

Очевидно, что нечеткое треугольное число *(a, b, c)*, иногда называемое триплетом, является нечетким числом с функциями $u(r) = \dfrac{cr-a}{b-a}$, $r \in [a/c, b/c]$, $v(r) = \dfrac{c-rc}{c-b}$, $r \in [b/c, 1]$. Кроме этого, нечеткое треугольное число вида *(a, b, b)*, называемое левым нечетким треугольным числом, задается функцией принадлежности вида

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x < a; \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b];$$

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1, x > b,$$

а нечеткое треугольное число вида *(b, b, c)*, называемое правым нечетким треугольным числом, - функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1, x < b; \mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c];$$

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x > c.$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РЕСУРСЫ

Рассмотрим задачу линейного программирования вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{5}$$

с нечеткими ограничениями на ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \widetilde{b}_i, \quad i = \overline{1,m}, \; x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где правые части ограничений (6) задаются в виде нечетких треугольных чисел $\widetilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$, $b_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Здесь допустимые отклонения $b_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, определяют величины граничных изменений ресурсов модели.

С учетом тождественности определенных выше понятий нечетких чисел, задача линейного программирования (5), (6) может быть переписана как задача оптимизации целевой функции (5) с ограничениями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + b_i^0 - \lambda b_i^0 \ , \ \ \lambda \in [0,1], \ \ \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \, . \qquad (7)$$

Полученная оптимизационная задача может быть решена как задача параметрического линейного программирования [5]. Этот способ является универсальным, не всегда учитывающим специфику поставленной задачи.

В данном случае для нахождения решения воспользуемся идеей, предложенной в работе [4]. Обозначим через L - величину функции цели, полученную на оптимальном решении задачи (5), (7) при $\lambda = 1$, а через U - величину функции цели, полученную на оптимальном решении задачи (5), (7) при $\lambda = 0$, т.е.

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*1}, \ \ U = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*0},$$

где x_j^{*0}, x_j^{*1}, $j = \overline{1,n}$ - оптимальные решения задач оптимизации (5), (7) при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответственно.

Очевидно, что $U \ge L$ и оптимальное значение функции цели задачи (5), (6) будет лежать в интервале $[L,U]$ при некотором значении параметра $\lambda^* \in [0,1]$. Для нахождения λ^* сформулируем задачу, эквивалентную начальной (5), (6). Так как параметр λ определяет гарантированный уровень нечетко заданных ресурсов, то определим следующую задачу оптимизации: найти значение параметра $\lambda \in [0,1]$, являющегося решением задачи линейного программирования

$$\lambda \ \to \max \qquad (8)$$

с ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda (U - L) \ge L \, , \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \lambda b_i^0 \le b_i + b_i^0 \ , \ i = \overline{1,m} \, , \quad (10)$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}$.

Эта задача является классической задачей линейного программирования, для нахождения решений которой можно применить любой вариант симплекс-метода.

4. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Параметр $\lambda \in [0,1]$ в формулировке оптимизационной задачи (8)-(10) определяет общий гарантированный уровень нечетко заданных ресурсов. На практике величина допустимых отклонений зависит от вида и специфики ресурсов, что позволяет обобщить предложенный выше подход на случай использования нескольких параметров.

Пусть известно, что допустимые отклонения в ограничениях на ресурсы независимы и могут быть формализованы в виде системы неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + b_i^0 - \lambda_i b_i^0 \ , \ \ \lambda_i \in [0,1], \ \ \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \, . \qquad (11)$$

Как и в вышеизложенном методе, введем обозначения

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*1}, \ \ U = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*0},$$

где x_j^{*0}, x_j^{*1}, $j = \overline{1,n}$ - оптимальные решения задач оптимизации (5), (7) при $\lambda_i = 0$ и $\lambda_i = 1$, $i = \overline{1,m}$, соответственно.

Для нахождения оптимальных значений параметров $\lambda^* = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ можно сформулировать следующую задачу многокритериальной оптимизации: найти значения $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m , \lambda_i \in [0,1], \ i = \overline{0,m}$, являющиеся решением задачи линейного программирования с несколькими критериями

$$\lambda_0 \ \to \max \, , \ \lambda_1 \ \to \max \, , \, \ldots , \ \lambda_m \ \to \max \quad (12)$$

с ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda_0 (U - L) \ge L \, , \qquad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \lambda_i b_i^0 \le b_i + b_i^0 \ , \ i = \overline{1,m} \, , \quad (14)$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}$.

Решение данной задачи в предположении равнозначности критериев может быть получено различными методами, например, на основе свертки критериев.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1.Рассмотрим в качестве тестового примера следующую задачу

$$x_1 + x_2 \to \max \tag{15}$$

$$4x_1 + x_2 \le 20, \tag{16}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 12, \tag{17}$$

$$0.5x_1 + 2x_2 \le 11, \tag{18}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2$.

Предположим, что в ограничении (16) нечетко задана величина ресурса (правая часть ограничения). Для определенности зададим объем ресурса в виде правого нечеткого треугольного числа $\tilde{20} = (20,20,22)$. Решение задачи (8)-(10) в этом случае имеет вид $\lambda^* = 1$, а решение задачи (15)-(18) - $x_1^* = 2$, $x_2^* = 5$, $f(x_1^*, x_2^*) = 17$.

Данный результат заставил обратить внимание на характер ограничений. Оптимальный план задачи (15)-(18) определяется ограничениями (17) и (18), и следовательно, не зависит от величины ресурса в ограничении (16).

2. Рассмотрим ту же задачу линейного программирования (15)-(18), предположив, что нечетко заданы в виде правых нечетких треугольных чисел ресурсы ограничений (17),(18): $\tilde{12} = (12,12,15)$, $\tilde{11} = (11,11,13)$.

Пусть гарантированный уровень ресурсов определяется единственным параметром λ. Решение задачи (8)-(10) в этом случае имеет вид $\lambda^* = 0.5$, а соответствующее решение задачи (15)-(18) - $x_1^* = 2.98$, $x_2^* = 5.24$, $f(x_1^*, x_2^*) = 18.7$.

3. Предположим, что в случае нечеткого задания ограничений (17), (18) гарантированные уровни ресурсов определяются независимо, т.е. рассмотрим решение задачи (12)-(14) с тремя параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3$. Оптимальное решение данной задачи $\lambda_0^* = 1, \lambda_2^* = 1, \lambda_3^* = 0.67$, а решение задачи (15)-(18) при полученных значениях параметров - $x_1^* = 0.$, $x_2^* = 5.83$, $f(x_1^*, x_2^*) = 17.5$.

Как видно из приведенных результатов, значение функции цели задачи оптимизации может быть улучшено за счет изменения гарантированного уровня величины ресурсов в заданной системе ограничений. Однако, при практическом использовании данного подхода необходимо проводить процедуру выбора оптимального решения из полученных при различных значениях параметров с учетом специфики конкретной задачи.

Список використаних джерел

1. *Dubois D.* Linear programming with fuzzy data / D. Dubois // Analysis of Fuzzy Information / J. C. Bezdek (ed.). Boca Raton : CRC Press, 1987. - Vol. 3 : Applications in Engineering and Science. - P. 241-263.
2. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Inf. Contr., 1965. – 8. - P.338-353.
3. *Dehghan M., Hashemi B.* Iterative solution of fuzzy linear systems// Appl. Math. Comput., 2006. – 175. - P.645-674.
4. *Bablu Jana, Tapan Kumar Roy.* Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. - 21(2). - P.243-268.
5. *Yudin D.B., Golshtein E.G.* Linear programming. - M.: Nauka, 1969. – 424p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 22.01.2013