УДК 519.21

Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

Двокритеріальна задача розподілу зовнішнього навантаження для мережі з періодичною інтенсивністю вхідного потоку

Для багатоканальної мережі з періодичним зовнішнім навантаженням розглянуто задачу максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику. В явному вигляді, через параметри моделі знайдені цільові функції оптимізаційної задачі і показано, що вони є лінійними відносно контрольваних параметрів.

Ключові слова: мережа, оптимізаційна задача, періодична інтенсивність, процес обслуговування, інтегральне рівняння.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: iamak@ukr.net

I.A. Makushenko, Ph.D.

Two-criterion problem of distribution of external load for the network with periodic rate of the input flow

The problem of maximization of average income and risk minimization for the multi-channel network with periodic external load is considered. The goal functions of optimization problem are found via system parameters in explicit form. It is shown that the goal functions are linear over controlled parameters.

Key Words: network, optimization problem, periodic rate, service process, integral equaption.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: iamak@ukr.net

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

1. Вступ

Моделювання мереж передачі даних, інформаційно-обчислювальних мереж і систем є потужним засобом дослідження характеристик їх роботи, який дозволяє знаходити пропускну спроможність, затримки в обробці інформації, виявляти резерви по завантаженню різних пристроїв, обирати об'єм буферної пам'яті, параметрів управління інформаційними потоками в мережі. На сьогоднішній день теорія стохастичних мереж є одним з основних перспективних напрямків моделювання систем мережевої структури. Тісний зв'язок з практикою весь час розширює клас моделей мережевої структури і цим обумовлюється інтенсивний розвиток теорії стохастичних мереж.

Важливим класом задач у дослідженні стохастичних мереж є оптимізаційні задачі пов'язані з розподілом інформаційних потоків, вибором пропускних спроможностей і топологічної структури мережі. Розв'язки таких задач надають можливість вирішувати практичні задачі управління ресурсами інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку. Сучасний стан досліджень в цій області представлено в роботах [1], [2].

Тема даної роботи пов'язана з проблемою оптимального поділу між вузлами мережі зовнішнього навантаження. Її можна віднести до згаданих вище оптимізаційних задач першого типу. У роботі для багатоканальної стохастичної мережі з періодичним зовнішнім навантаженням розглянуто задачу оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку.

Розглянемо мережу обслуговування, яка складається з *"r"* однотипних обслуговуючих вузлів. На обслуговуючі вузли надходить один зовнішній неоднорідний пуассонівський потік вимог $\nu(t)$ інтенсивності $\lambda(t)$, яка є періодичною функцією з періодом *T*. Вимога, що надійшла на вхід мережі, з ймовірністю $q_i, \quad i=1,2,...,r \quad (q_i \ge 0, \sum_{i=1}^{r} q_i = 1)$ надходить на обслуговування в "i" вузол. Для обслуговування вимоги в і-ому вузлі є необмежена кількість обслуговуючих приладів. Час обслуговування розподілений за показниковим законом з параметром μ_i. Після завершення обслуговування в і-ому вузлі вимога з ймовірністю p_{ij} надходить на обслуговування у j-ий вузол та з ймовірністю $p_{ir+1} = 1 - \sum_{j=1}^{r} p_{ij}$

залишає мережу. Матрицю $P = \left\| p_{ij} \right\|_1^r$ будемо називати матрицею маршрутизації мережі. Мережі такого типу для зручності будемо позначати через $\left[M_t \mid M \mid \infty \right]^r$.

Основною метою роботи є вибір такого управління q_i, $i = 1,2,...,r$ вхідним потоком, яке б максимізувало середній прибуток і мінімізувало величину ризику на періоді T.

2. Постановка оптимізаційної задачі

Розглянемо процес обслуговування вимог у $\left[M_t \mid M \mid \infty \right]^r$ - мережі. Через $X_i(t)$, $i = 1,2,...,r$ будемо позначати кількість зайнятих приладів у i-ому вузлі в момент часу t. Процес $X(t) = (X_1(t), X_2(t),...,X_r(t))$ приймає значення у фазовому просторі $S = \{\alpha = (\alpha_1,...\alpha_r) : \alpha_i \in Z^+, i = 1,2,...,r\}$, $Z^+ = \{0,1,2,...\}$ і є ланцюгом Маркова з неперервним часом. У подальшому будемо вважати, що $X(0) = (0,0,...,0)$, тобто у початковий момент часу $t = 0$ мережа порожня. На процесі $X(t), t \geq 0$ визначимо адитивний функціонал $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t),...,Y_r(t))$, де $Y_i(t)$, $i = 1,2,...,r$ - число вимог, обслуговування яких завершилося в i-ому вузлі за час t. Будемо вважати, що $\lambda(t), \mu_i, i = 1,2,...,r, P$ - задані, а вибір вектора $q = (q_1,...,q_r)$ знаходиться в нашому розпорядженні.

Перейдемо до постановки оптимізаційної задач.

Нехай c_i, $i = 1,2,...,r$ - прибуток від обслуговування однієї вимоги в i-ому вузлі. Позначимо через $c' = (c_1, c_2,...,c_r)$, $V(t) = \left\| V_{ij}(t) \right\|_1^r$, де $V_{ij}(t) = \operatorname{cov}(Y_i(t), Y_j(t))$. Тоді важливою є наступна оптимізаційна задача:

$$M(q) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{r} c_i M[Y_i((n+1)T) - Y_i(nT)] \to \max, \quad (1)$$

$$D(q) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{nT} \int_{nT}^{(n+1)T} c'V(t)c dt \to \min, \quad \sum_{i=1}^{r} q_i = 1. \quad (2)$$

3. Знаходження явного виду цільової функції

Для того, щоб розв'язати оптимізаційну задачу (1) − (2), необхідно подати функціонали $M(q)$ і $D(q)$ через параметри мережі. Для цієї мети служить наступний результат.

Теорема. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P менше 1, то $M(q), D(q)$ існують і

$$M(q) = \Lambda(T) q'(I - P)^{-1} \Delta(\delta) c, \quad (3)$$

$$D(q) = \Lambda(T) c'Vc, \quad (4)$$

де

$$q' = (q_1,...,q_r), \ \Lambda(T) = \int_0^T \lambda(t) dt,$$

$$\Delta(\delta) = \left\| \delta_i \delta_{ij} \right\|_1^r, \ V = \left\| V_{\alpha\beta} \right\|_1^r,$$

$$V_{\alpha\beta} = \delta_\alpha q'(I - P)^{-1} \Delta^{(\beta)} P_0 (I - P)^{-1} e_\alpha +$$
$$+ \delta_\beta q'(I - P)^{-1} \Delta^{(\alpha)} P_0 (I - P)^{-1} e_\beta +$$
$$+ \delta_{\alpha\beta} \delta_\alpha q'(I - P)^{-1} e_\alpha,$$

$$\delta_\alpha = 1 - p_{\alpha\alpha} - p_{\alpha r+1}, \ \Delta^{(\beta)} = \left\| \delta_{i\beta} \delta_{ij} \right\|_{i,j=1}^r,$$

$$e_\alpha' = (0,...,0,1,0,...,0), \ \alpha, \beta = 1,2,...,r,$$

$$P_0 = \left\| (1 - \delta_{ij}) p_{ij} \right\|_1^r.$$

Доведення теореми базується на наступному результаті.

Розглянемо гіллястий процес Беллмана-Харріса ([3])

$$Z(t) = (Z^1(t),...,Z^r(t), Z^{(r+1)}(t),...,Z^{(2r)}(t)), \quad t \geq 0$$

$$Z^{(i)}(t) = (Z_1^{(i)}(t),...,Z_r^{(i)}(t), Z_{r+1}^{(i)}(t),...,Z_{2r}^{(i)}(t)),$$

з $2r$ типами частинок $T_1,\dots,T_r,T_{r+1},\dots,T_{2r}$. Кожна з частинок типу T_i має випадкову тривалість життя з функцією розподілу $G^{(i)}(t)$, причому

$$G^{(i)}(t) = 1 - e^{-\mu_i(1 - p_{ii})t}, t \geq 0, i = 1,2,...,r, \quad (5)$$

$$G^{(i)}(t) = \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}, \quad i = r+1,...,2r. \quad (6)$$

Генератриси $f^{(i)}(z)$ безпосередніх нащадків від однієї частинки типу T_i дорівнюють

$$f^{(i)}(z) = z_{r+i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} z_j, i = 1,2,...,r, \quad (7)$$

$$f^{(i)}(z) = z_i, i = r+1,...,2r. \quad (8)$$

Лема. Нехай виконуються умови теореми, тоді

$$MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t) = A_\alpha^{(i)}(t), \quad (9)$$

$$MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t)(Z_{r+\beta}^{(i)}(t) - \delta_{\alpha\beta}) = B_{\alpha\beta}^{(i)}(t), \quad (10)$$

$$\alpha, \beta = 1,2,...,r,$$

де $A_\alpha^{(i)}$ - єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$A_\alpha^{(i)}(t)=\delta_{i\alpha}(1-\frac{p_{ir+1}}{1-p_{ii}})(1-e^{-\mu_i(1-p_{ii})t})+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\int_0^t A_\alpha^{(j)}(t-u)e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du,\ i=1,2,...,r, \quad (11)$$

а $B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$ - єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)=\delta_{i\alpha}\int_0^t\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}A_\beta^{(j)}(t-u)\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$

$$+\delta_{i\beta}\int_0^t\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}A_\alpha^{(j)}(t-u)\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+ \quad (12)$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\int_0^t B_{\alpha\beta}^{(j)}(t-u)e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du.$$

Доведення:

Відомо ([3], стор. 231), що генератриси

$$F^{(i)}(t,z)=\sum_\alpha P(Z^{(i)}(t)=\alpha)z^\alpha,\ \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r,\alpha_{r+1},...,\alpha_{2r}),$$

$$z=(z_1,...,z_r,z_{r+1},...,z_{2r}),\ i=1,2,...,2r,$$

задовольняють системі інтегральних рівнянь, яка для функцій (5)-(8) приймає вигляд

$$F^{(i)}(t,z)=z_i e^{-\mu_i(1-p_{ii})t}+ \quad (13)$$

$$+\int_0^t F^{(r+i)}(t-u,z)\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}F^{(j)}(t-u,z)\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du,$$

$$i=1,2,...,r,$$

$$F^{(i)}(t,z)=z_i\left[1-G^{(i)}(t)\right]+\int_0^t F^{(i)}(t-u,z)dG^{(i)}(u),$$

$$i=r+1,...,2r.$$

З останнього рівняння випливає, що $F^{(i)}(t,z)=z_i,\ i=r+1,...,2r$. Тоді з системи (13) одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(i)}(t,z)=\delta_{i\alpha}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$

$$+z_{r+i}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du, \quad (14)$$

$$\alpha=1,2,...,r,\quad i=1,2,...,r.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{r+\alpha}\partial z_{r+\beta}}F^{(i)}(t,z)= \quad (15)$$

$$=\delta_{i\alpha}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{r+\beta}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$

$$+\delta_{i\beta}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du+$$

$$+z_{r+i}\int_0^t\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_i p_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_{r+\alpha}\partial z_{r+\beta}}F^{(j)}(t-u,z)\right\}e^{-\mu_i(1-p_{ii})u}du,$$

$$\alpha,\beta=1,2,...,r,i=1,2,...,r.$$

Нехай $\frac{\partial^2}{\partial z_{r+\alpha}\partial z_{r+\beta}}F^{(j)}(t,z)\Big|_{z=\bar{1}}=B_{\alpha\beta}^{(j)}(t),\alpha,\beta=1,2,..,r$, в той час, як $\frac{\partial}{\partial z_{r+\alpha}}F^{(j)}(t,z)\Big|_{z=\bar{1}}=A_\alpha^{(j)}(t)$. Тоді підстановка $z=\bar{1}$ в рівняння (14), (15) дає рівняння (11), (12).

Лема доведена.

Доведення теореми.

Процес обслуговування вимог у $\left[M_t\,|\,M\,|\,\infty\right]^r$ - мережі разом з адитивним функціоналом можна подати у такому вигляді

$$(X(t),Y(t))=(X_1(t),...,X_r(t),Y_1(t),...,Y_r(t))\overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=}\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t)}(Z_1^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)}),...,Z_{2r}^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)})), \quad (16)$$

де $\overset{d}{=}$ означає рівність за розподілом, $\nu^{(i)}(t)$ - число вимог, що надійшли у мережу через i-ий вузол за час t, $\tau_j^{(i)}$ - час надходження у мережу j-ої вимоги через i-ий вузол, $Z^{(m,1)}(t),Z^{(m,2)}(t),...$ - незалежні випадкові величини, розподіл яких співпадає з розподілом $Z^{(m)}(t)$.

Спочатку доведемо співвідношення (3).

З рівності (16) маємо, що

$$MX_i(t)=\sum_{m=1}^{r}M\left\{\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t)}MZ_i^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)})\right\}=$$

$$=\sum_{m=1}^{r}\int_0^t\left[MZ_i^{(m)}(t-u)\right]dM\nu^{(m)}(u), \quad (17)$$

$$i=1,2,...,r.$$

$$MY_i(t) = \sum_{m=1}^{r} M\left\{ \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t)} MZ_i^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)}) \right\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^t \left[MZ_i^{(m)}(t-u) \right] dM\nu^{(m)}(u), \qquad (18)$$

$$i = r+1,\dots,2r\ .$$

З леми 1 маємо, що $MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t) = A_{r+\alpha}^{(i)}(t), \alpha = 1,2,\dots,r$, де функції $A_{r+\alpha}^{(1)}(t), A_{r+\alpha}^{(2)}(t),\dots,A_{r+\alpha}^{(r)}(t)$ задовольняють системі інтегральних рівнянь (11), яка є еквівалентною системі диференціальних рівнянь

$$A_{r+\alpha}^{(i)}{}'(t) = m_i\delta_{i\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} A_{r+\alpha}^{(j)}(t) - \mu_i(1-p_{ii}) A_{r+\alpha}^{(i)}(t),$$

$$A_{r+\alpha}^{(i)}(0) = 0, i = 1,2,\dots,r, \qquad (19)$$

де $m_i = \mu_i(1-p_{ii}-p_{ir+1})$.

Нехай e_i - r-вимірний вектор, що є i-им рядком одиничної матриці відповідної розмірності. Тоді система рівнянь (19) у векторно-матричному запису має вигляд

$$A_\alpha'(t) = QA_\alpha(t) + m_\alpha e_\alpha\ , \quad A_\alpha(0) = \overline{0}\,, \qquad (20)$$

де $Q = \Delta(\mu)(P-I), \Delta(\mu) = \left\| \delta_{ij}\mu_i \right\|_1^r$.

Застосовуючи метод варіації сталої, знаходимо

$$A_\alpha(t) = m_\alpha Q^{-1}(e^{Qt}-I)e_\alpha. \qquad (21)$$

Таким чином

$$MY_i(t) = \sum_{m=1}^{r} q_m \int_0^t A_i^{(m)}(t-u)\lambda(u)du. \qquad (22)$$

Нехай $t=nT$, де T - період функції $\lambda(t)$. Тоді неважко перевірити, що

$$\int_0^{nT} A_i^{(m)}(nT-u)\lambda(u)du = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T A_i^{(m)}(kT-u)\lambda(u)du\,,$$

і звідси маємо

$$M\left\{ Y_i((n+1)T) - Y_i(nT) \right\} = \qquad (23)$$

$$= \sum_{m=1}^{r} q_m \int_0^T A_i^{(m)}((n+1)T-u)\lambda(u)du\ .$$

Нехай $A_\alpha^{(i)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} A_\alpha^{(i)}(t)dt, s \ge 0$. Тоді в термінах перетворень Лапласа диференціальне рівняння (20) записується у вигляді

$$sA_\alpha(s) = QA_\alpha(s) + \frac{1}{s} m_\alpha e_\alpha\,, \qquad (24)$$

де $A_\alpha(s) = (A_\alpha^1(s), A_\alpha^2(s),\dots,A_\alpha^r(s))$.

Розв'язком рівняння (24) буде

$$A_\alpha(s) = \frac{1}{s} m_\alpha (Is-Q)^{-1} e_\alpha\,. \qquad (25)$$

Звідси знаходимо, що

$$\lim_{t\to+\infty} A_\alpha(t) = \lim_{s\to 0+} s\frac{1}{s} m_\alpha (Is-Q)^{-1} e_\alpha =$$

$$= m_\alpha (I-P)^{-1} \Delta^{-1}(\mu) e_\alpha. \qquad (26)$$

Із співвідношень (23) та (26) одержуємо (3).
Доведемо співвідношення (4).
Розглянемо випадковий вектор

$$(X(t_1),Y(t_1),X(t_2),Y(t_2)) \overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=} \sum_{m=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} Z^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)}), \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)}) + \qquad (27)$$

$$+ \sum_{k=\nu^{(m)}(t_1)+1}^{\nu^{(m)}(t_2)} Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)}) \Big).$$

Введемо такі позначення

$$F = \sigma\{\nu'(u) = (\nu^{(1)}(u), \nu^{(2)}(u),\dots,\nu^{(r)}(u)), 0 \le u \le t\}\,,$$

$$\xi = \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} Z^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)})\,,$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)}) + \sum_{k=\nu^{(m)}(t_1)+1}^{\nu^{(m)}(t_2)} Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)}) \right].$$

Тоді

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\operatorname{cov}_F(\xi,\eta) +$$

$$+ M[M_F\xi \cdot M_F\eta'] - M[M_F\xi] \cdot M[M_F\eta']\,, \qquad (28)$$

де $\operatorname{cov}_F(\xi,\eta) = M_F\xi\eta' - M_F\xi \cdot M_F\eta'$

В нашому випадку будемо мати

$$M\operatorname{cov}_F(\xi,\eta) = \qquad (29)$$

$$= \sum_{m=1}^{r} M\left[\sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} \operatorname{cov}\left(Z^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)}), Z^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} M\left[\int_0^{t_1} \operatorname{cov}\left(Z^{(m)}(t_1-u), Z^{(m)}(t_2-u)\right) d\nu^{(m)}(u)\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} \operatorname{cov}\left(Z^{(m)}(t_1-u), Z^{(m)}(t_2-u)\right) dM\nu^{(m)}(u).$$

Введемо позначення

$$a_{i\alpha}(t) = MZ_\alpha^{(i)}(t), b_{i\beta}(t) = MZ_\beta^{(i)}(t),\ A = \left\|a_{ij}(t)\right\|_1^r,$$

$$B = \left\|b_{ij}(t)\right\|_1^r,\ \alpha = 1,2,\ldots,r, \beta = r+1,\ldots 2r.$$

Тоді можемо записати

$$M_F\xi = \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} (a_m(t_1-\tau_k^{(m)}), b_m(t_1-\tau_k^{(m)})) =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} (a_m(t_1-u), b_m(t_1-u)) d\nu^{(m)}(u),$$

$$M_F\eta' = \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu^{(m)}(t_1)} (a_m(t_2-\tau_k^{(m)}), b_m(t_2-\tau_k^{(m)}))' +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=\nu^{(m)}(t_1)+1}^{\nu^{(m)}(t_2)} (a_m(t_2-\tau_k^{(m)}), b_m(t_2-\tau_k^{(m)}))' =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_2} (a_m(t_2-u), b_m(t_2-u))' d\nu^{(m)}(u),$$

де $a_m(\cdot), b_m(\cdot)$ - m-ті рядки матриць A і B відповідно, розташовані, як вектор-стовпці.

Потоки вимог $\nu^{(i)}(t)$ для різних $i=1,2,\ldots,r$ є незалежними неоднорідними пуассонівськими потоками. Тому

$$M\left[M_F\xi \cdot M_F\eta'\right] - M\left[M_F\xi\right]\cdot M\left[M_F\eta'\right] = \tag{30}$$

$$= \sum_{m=1}^{r} \left\{ M\left[\left(\int_0^{t_1} (a_m(t_1-u), b_m(t_1-u)) d\nu^{(m)}(u)\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\times \left(\int_0^{t_2} (a_m(t_2-u), b_m(t_2-u))' d\nu^{(m)}(u)\right)\right] -$$

$$- M\left[\int_0^{t_1} (a_m(t_1-u), b_m(t_1-u)) d\nu^{(m)}(u)\right] \times$$

$$\left. \times M\left[\int_0^{t_2} (a_m(t_2-u), b_m(t_2-u))' d\nu^{(m)}(u)\right]\right\}.$$

У співвідношенні (30) при $t_1 = t_2 = t$ зробимо заміну інтегралів на суми і, враховуючи зв'язок пуассонівського процесу з порядковими статистиками ([5]), будемо мати

$$M \sum_{k_1,k_2=1}^{\nu^{(m)}(t)} \left(a_m(t-\tau_{k_1}^{(m)}), b_m(t-\tau_{k_1}^{(m)})\right)\left(a_m(t-\tau_{k_2}^{(m)}), b_m(t-\tau_{k_2}^{(m)})\right)' =$$

$$= q_m \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)\left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)' \lambda(u) du +$$

$$+ q_m^2 \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right) \lambda(u) du \times$$

$$\times \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)' \lambda(u) du,$$

а також

$$M \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right) d\nu^{(m)}(u) =$$

$$= q_m \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right) \lambda(u) du,$$

$$M \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)' d\nu^{(m)}(u) =$$

$$= q_m \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)' \lambda(u) du.$$

Звідси випливає, що при $t_1 = t_2 = t$

$$M\left[M_F\xi \cdot M_F\eta'\right] - M\left[M_F\xi\right]\cdot M\left[M_F\eta'\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} q_m \int_0^t \left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)\left(a_m(t-u), b_m(t-u)\right)' \lambda(u) du.$$

Тоді коваріація компонент, що нас цікавлять, дорівнює

$$\sum_{m=1}^{r} q_m \int_0^t b_m(t-u) b_m'(t-u) \lambda(u) du = \tag{31}$$

$$= \int_0^t B'(t-u) \Delta(q) B(t-u) \lambda(u) du.$$

Неважко перевірити, що для періодичної функції $\lambda(t), t \ge 0$ з періодом T має місце таке співвідношення

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \left[\int_0^t k(t-u)\lambda(u) du\right] dt = \int_0^T \lambda(T-u) du \int_0^{nT+u} k(t) dt. \tag{32}$$

З леми 1 випливає, що $MZ_{r+\alpha}^{(i)}(t)(Z_{r+\beta}^{(i)}(t) - \delta_{\alpha\beta}) = B_{\alpha\beta}^{(i)}(t)$, $\alpha, \beta = 1,2,\ldots,r$, де функції $B_{\alpha\beta}^{(1)}(t), B_{\alpha\beta}^{(2)}(t), \ldots, B_{\alpha\beta}^{(r)}(t)$ задовольняють системі інтегральних рівнянь (12), яка є еквівалентною системі диференціальних рівнянь

$$B_{\alpha\beta}^{(i)\prime}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} B_{\alpha\beta}^{(j)}(t) - \mu_i (1 - p_{ii}) B_{\alpha\beta}^{(i)}(t) +$$

$$+ \delta_{i\beta} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} A_{\alpha}^{(j)}(t) + \delta_{i\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \mu_i p_{ij} A_{\beta}^{(j)}(t), \qquad (33)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(0) = 0, \alpha, \beta = 1,2,\ldots,r.$$

Введемо позначення

$$\Delta^{(\beta)} = \left\| \delta_{i\beta} \delta_{ij} \right\|_{i,j=1}^{r}, \ \Delta_d = \left\| \delta_{ij} \mu_i (p_{ii} - 1) \right\|_1^r.$$

Тоді диференціальне рівняння (33) можна подати у вигляді

$$B_{\alpha\beta}'(t) = Q B_{\alpha\beta}(t) + \Delta^{(\beta)} (Q - \Delta_d) A_{\alpha}(t) + \qquad (34)$$

$$+ \Delta^{(\alpha)} (Q - \Delta_d) A_{\beta}(t),$$

$$B_{\alpha\beta}(0) = \overline{0}, \alpha, \beta = 1,2,\ldots,r,$$

де $B_{\alpha\beta}(t) = (B_{\alpha\beta}^{(1)}(t), B_{\alpha\beta}^{(2)}(t), \ldots, B_{\alpha\beta}^{(r)}(t)), A_{\alpha}(t) =$

$$= (A_{\alpha}^{(1)}(t), A_{\alpha}^{(2)}(t), \ldots, A_{\alpha}^{(r)}(t)).$$

Введемо перетворення Лапласа

$$B_{\alpha\beta}^{(i)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} B_{\alpha\beta}^{(i)}(t) dt, s \geq 0.$$

Для перетворень Лапласа рівняння (34) приймає вигляд

$$s B_{\alpha\beta}(s) = Q B_{\alpha\beta}(s) + \Delta^{(\beta)} (Q - \Delta_d) A_{\alpha}(s) + \qquad (35)$$

$$+ \Delta^{(\alpha)} (Q - \Delta_d) A_{\beta}(s).$$

Розв'язком рівняння (35) буде вектор

$$B_{\alpha\beta}(s) = \frac{1}{s} m_{\alpha} (sI - Q)^{-1} \Delta^{(\beta)} (Q - \Delta_d)(sI - Q)^{-1} e_{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{s} m_{\beta} (sI - Q)^{-1} \Delta^{(\alpha)} (Q - \Delta_d)(sI - Q)^{-1} e_{\beta}.$$

Звідси знаходимо граничне значення

$$\lim_{t \to +\infty} B_{\alpha\beta}(t) = \lim_{s \to 0+} s B_{\alpha\beta}(s) =$$

$$= \delta_{\alpha} (I - P)^{-1} \Delta^{(\beta)} P_0 (I - P)^{-1} e_{\alpha} + \qquad (36)$$

$$+ \delta_{\beta} (I - P)^{-1} \Delta^{(\alpha)} P_0 (I - P)^{-1} e_{\beta},$$

де $\delta_{\alpha} = 1 - p_{\alpha\alpha} - p_{\alpha r+1}$, $P_0 = \left\| (1 - \delta_{ij}) p_{ij} \right\|_1^r$.

Із співвідношень (31), (32) та (36) одержуємо (4).

Теорема доведена.

4. Висновок

З теореми можна зробити висновок, що цільові функції $M(q)$, $V(q)$ оптимізаційної задачі (1) – (2) є лінійними відносно контрольованих параметрів. Відповідні функціонали задаються співвідношеннями (3), (4). Таким чином двокритеріальна оптимізаційна задача максимізації середнього прибутку та мінімізації величини ризику може бути розв'язана стандартними методами багатокритеріальної оптимізації (див., наприклад, [6]), які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв. Розв'язок задачі (1) − (2) $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_r^*)$ є таким керуванням вхідним потоком, що максимізує прибуток від роботи мережі та мінімізує ризик на періоді *T*.

Список використаних джерел

1. *Lebedev E.A., Makushenko I.A.* Risk optimization for multi-channel stochastic network. − Kyiv: National Library of Ukraine, 2007. – 65 c.
2. *Vishnevsky M.V.* The theoretical basis of the design of computer networks. - Moscow: Technosphere, 2003. - 512 p.
3. *Sevastyanov B.A.* Branching processes. Moscow: Nauka, 1971. - 436 p.
4. *Vatutin V.A.* The critical Bellman-Harris branching processes with immigration and several types of particles. Probability theory and its applications. - 1976. - V. 21, № 2. - S. 447-454.
5. *Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Y., Shurenkov V.M.* Random processes. - Kyiv: Naukova dumka, 1983. - 366 p.
6. *Volkovich V.L., Voloshin A.F., Zaslavsky V.A., Ushakov I.A.* Models and methods of optimization of reliability of complex systems / Pod red. Mikhalevicha V.S. - Kiev: Naukova dumka, 1993. - 312 p.

Надійшла до редколегії 27.12.12