УДК 510.6

Нікітченко М.С.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Потапенко Ю.І.[2], студент

Алгебри багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності

У статті досліджується клас багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності. Областю значень предикатів є повна решітка з інволюцією. Будується алгебра таких предикатів, знаходиться система її твірних, а також визначається нормальна форма її елементів.

Ключові слова: відношення толерантності, багатозначний предикат, алгебра предикатів, система твірних.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: julepka@gmail.com

M. S. Nikitchenko[1], Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor,
I. I. Potapenko[2], student

Algebras of multivalued tolerant-stable predicates

In this paper the class of multivalued tolerant-stable predicates is investigated. The range of predicates is a complete lattice with involution. The algebra of such predicates is built, the set of its generators is identified, and a normal form of its elements is constructed.

Key Words: tolerance relation, multivalued predicate, algebra of predicates, set of generators.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: julepka@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б. (за результатами конференції TAAPSD'2012)

Дослідження властивостей бінарних відношень є невід'ємною складовою математичної логіки. Вивченню властивостей відношення часткового порядку та відношення еквівалентності приділялося багато років. У той же час порівняно небагато досліджень проведено стосовно відношення толерантності, яке є більш загальним ніж відношення еквівалентності та є не менш актуальним. Відношення толерантності широко використовуються у таких областях інформатики, як розпізнавання образів, штучний інтелект, бази даних та знань тощо [2-6].

Метою цієї роботи є вивчення багатозначних предикатів, стабільних відносно відношення толерантності. Використовуються позначення робіт [7, 8].

Постановка проблеми

Нехай D – довільна множина. Бінарне відношення $\approx\, \in D\times D$ називається відношенням толерантності, якщо воно рефлексивне та симетричне на D. Пара $<D, \approx>$ називається множиною з відношенням толерантності (або просто толерантною множиною).

Нехай $L=\{l_i \mid i\in I\}$ – повна решітка з інволюцією [1]; $PL = D \xrightarrow{p} L$ – множина часткових предикатів. Вираз $p(d)\uparrow$ означає, що предикат p не визначений на d, $p(d)\downarrow$ – p визначений на d, $p(d)\downarrow = l$ – p визначений на d зі значенням l. Операції на L позначаємо як $\bigsqcup$ та $\bigsqcap$, інволюцію – як ~. Елементи решітки L задовольняють наступним властивостям [2]:

$$(\forall l\in L)(\sim(\sim(l)) = l) \text{ – інволюція;}$$
$$(\{l_i \mid i\in I\}\subseteq L)(\sim(\bigsqcup\{l_i \mid i\in I\}) =$$
$$=\bigsqcup\{\sim(l_i) \mid i\in I\}) \text{ – правило де Моргана;}$$
$$(\bigsqcup_{i\in I}(\bigsqcup_{j\in J_i}(l_{ij})) = \bigsqcup_{j\in J_i, i\in I}(l_{ij})) \text{ – асоціативність}$$
$$(l_{ij}\in L,\ i\in I,\ j\in J).$$

Означення 1. Предикат $p\in PL$ називається стабільним відносно відношення толерантності (у подальшому також толерантним предикатом), якщо для усіх $d, d' \in D$ і $l \in L$ таких що $d \approx d'$, $p(d)\downarrow = l$ і $p(d')\downarrow = l'$, маємо $l' = l$. Отриманий клас толерантних предикатів позначимо *PLTS*.

Проблема, що досліджується в роботі, полягає в побудові алгебри предикатів, стабільних відносно відношення толерантності, знаходження системи її твірних, та нормальної форми таких предикатів.

Почнемо з дослідження відношення толерантності $\approx$. Надалі під *D* будемо розуміти множину з відношенням толерантності $\approx$.

Властивості множин з відношенням толерантності

Означення 2. Елементи $a, b \in D$ називаються нетолерантними, якщо $(a,b) \notin \approx$ це позначається $a \not\approx b$. Зрозуміло, що нетолерантне відношення також є симетричним.

Означення 3. Нехай $A, B \subseteq D$. Множини *A* та *B* називаються нетолерантними (позначається $A \not\approx B$), якщо $A \times B \cap \approx = \varnothing$. Інакше кажучи, множини *A* та *B* нетолерантні, якщо немає таких $a \in A$ і $b \in B$, що $a \approx b$.

Означення 4. Нехай $d \in D$. Множина $d^{\#} = \{a \mid a \not\approx d, a \in D\}$ називається нетолерантним доповненням елемента *d*.

Означення 5. Нехай $A \subseteq D$. Множина $A^{\#} = \{d \mid \forall a \in A(d \not\approx a), d \in D\}$ називається нетолерантним доповненням множини *A*.

З означень випливає, що $A^{\#} = \cap\{a^{\#} \mid a \in A\}$.

Лема 1. Нехай $A, B \subseteq D$ і $A \not\approx B$. Тоді $A \cap B = \varnothing$, $B \subseteq A^{\#}$ і $A \subseteq B^{\#}$.

Доведення леми тривіальне.

Властивості предикатів стабільних відносно відношенням толерантності

Означення 6. Нехай $p \in PL$. Областю *l*-значення предиката *p* називається множина $p^l = \{d \mid p(d) \downarrow = l, d \in D\}, l \in L$.

Наведемо декілька очевидних тверджень.

Лема 2. Нехай $p \in PL$. Тоді $(\forall l, l' \in L, l \neq l')(p^l \cap p^{l'} = \varnothing)$. Обернено, нехай $A_l \subseteq D, l \in L$, $A_l \cap A_{l'} = \varnothing, l, l' \in L, l \neq l'$. Тоді існує єдиний предикат $p \in PL$, для якого $p^l = A_l, l \in L$.

Лема 3. Нехай $p \in PLTS$. Тоді p^l, $l \in L$ – нетолерантні множини, що не перетинаються. Обернено, нехай $A_l \subseteq D, l \in L$ – нетолерантні множини, що не перетинаються. Тоді існує єдиний $p \in PLTS$, для якого $p^l = A_l, l \in L$

Інфінітарна алгебра часткових предикатів

Основними операціями над частковими предикатами є унарна операція заперечення $\neg : PL \xrightarrow{t} PL$ і аналоги операцій сильної диз'юнкції $\vee$ і сильної кон'юнкції $\wedge$, введених Кліні. На відміну від традиційних алгебр із *n*-арними операціями, введені операції є множинними – їхніми аргументами є не *n*-ки предикатів, а множини предикатів, тобто ці операції мають тип $2^{PL} \xrightarrow{t} PL$. Тут функціональна стрілка $\xrightarrow{t}$ задає клас тотальних (всюди визначених) відображень.

Означення 7. Інфінітарні операції множинної диз'юнкції, кон'юнкції і унарна операція заперечення задаються наступним чином при $p, p_i \in PL(i \in I), l \in L$:

$$\left(\vee\{p_i | i \in I\}\right)^T = \{d \mid d \in D, \bigsqcup\{p_i(d) \mid i \in I\} = T\} \cup$$
$$\cup\{d \mid d \in D, \exists k \in I(p_k(d) = T)\};$$
$$\left(\vee\{p_i | i \in I\}\right)^l = \{d \mid d \in D, \bigsqcup\{p_i(d) \mid i \in I\} = l\}, l \neq T;$$
$$\left(\vee\{p_i | i \in I\}\right)^F = \{d \mid d \in D, \bigsqcap\{p_i(d) \mid i \in I\} = F\} \cup$$
$$\cup\{d \mid d \in D, \exists k \in I(p_k(d) = F)\};$$
$$\left(\vee\{p_i | i \in I\}\right)^l = \{d \mid d \in D, \bigsqcap\{p_i(d) \mid i \in I\} = l\}, l \neq F;$$
$$(\neg p)^l = \{d \mid d \in D, l = \sim(p(d))\}.$$

Слід зауважити, що: $\cup\{p_i^T \mid i \in I\} \subseteq \subseteq \left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^T$, $\cap\{p_i^F \mid i \in I\} = \left(\vee\{p_i \mid i \in I\}\right)^F$, де $T = \bigsqcup L$, $F = \bigsqcap L$; аналогічно для кон'юнкції.

Означення 8. Алгебра $AKL(PL, D, L) = \langle PL, \vee, \wedge, \neg \rangle$ називається *L*-значною інфінітарною предикатною алгеброю Кліні.

Будемо використовувати бінарні диз'юнкцію і кон'юнкцію, як скорочення формул $p \vee q = \vee\{p, q\}$, $p \wedge q = \wedge\{p, q\}$. Будемо використовувати найбільший елемент *T* та найменший – *F*, причому $\bar{T} = \wedge\varnothing$, $\bar{F} = \vee\varnothing$. Всюди невизначений предикат позначимо $\perp$. Через $\bar{l}$ позначимо константний предикат такий, що $\bar{l}(d) \downarrow = l, \forall d \in D$, $l \in L$.

Теорема 1. Множина предикатів *PLTS* утворює підалгебру алгебри *AKL(PL,D)*.

Доведення. Необхідно показати замкненість класу *PLTS* відносно операцій алгебри.

Нехай $\{p_i \mid i\in I\}\subseteq PLTS$. З однозначності $\vee\{p_i \mid i\in I\}$ випливає, що множини $(\vee\{p_i \mid i\in I\})^l, l\in L$ не перетинаються. Покажемо, що ці множини нетолерантні.

Нехай $(\vee\{p_i \mid i\in I\})(d)\downarrow=l$ та $(\vee\{p_i \mid i\in I\})(d')\downarrow=l'$, $d\approx d'$, $d,d'\in D$. Доведемо, що $l=l'$. Треба розглянути два випадки: $l\neq T$ та $l=T$. Нехай $l\neq T$. Тоді всі предикати на d визначені. Нехай $p_i(d)=l_i, i\in I$. Тепер треба розглянути два наступні підвипадки:

1) Предикати на d' визначені і $p_i(d')=l_i'$, $i\in I$. Оскільки предикати стабільні відносно відношення толерантності, то $l_i=l_i', i\in I$.

2) Не всі предикати визначені на d'; це можливо лише для випадку $l'=T$. Тоді для деякого $p_{i^*}(d)=T$, що суперечить $l\neq T$.

Випадок $l=T$ розглядається аналогічно. Для кон'юнкції доведення будується аналогічно. Доведення, для заперечення тривіальне бо інволюція є бієктивною операцією на *L*.

Означення 9. Алгебра $ALTS(PLTS,D,L)=$ $=<PLTS,\vee,\wedge,\neg>$ називається інфінітарною алгеброю *L*-значних толерантних предикатів.

Саме алгебра $ALTS(PLTS,D,L)$ є центральним об'єктом дослідження у даній роботі.

Попередньо визначимо важливу підалгебру алгебри $ALTS(PLTS,D,L)$, задану на множині *PBTS* двозначних часткових толерантних предикатів з класу $D\xrightarrow{p}\{T,F\}$. В роботі [8] доводиться замкненість *PBTS* відносно інфінітарних композицій Кліні. Отримуємо наступне твердження.

Лема 4. Алгебра $ABTS(PBTS,D)=$ $=<PBTS,\vee,\wedge,\neg>$ є підалгеброю алгебри $ALTS(PLTS,D,L)$.

Система твірних алгебри толерантних предикатів

Для подання класів предикатів звичайно використовують характеристичний предикат χ_d, що однозначно визначає елемент $d\in D$. У термінах областей істинності і хибності він задається так: $\chi_d{}^T=\{d\}$, $\chi_d{}^F=D\setminus\{d\}$. Однак цей предикат не є стабільним відносно відношення толерантності, якщо знайдеться d', відмінне від *d*, таке що $d\approx d'$. Тому замість характеристичного предиката будемо використовувати його найкраще толерантне наближення.

Означення 8. Характеристичним толерантним предикатом елемента $d\in D$ називається предикат τ_d, для якого: $\tau_d^T=\{d\}$, $\tau_d^F=d^\#$.

Очевидно, що предикат τ_d є толерантним.

Означення 10. Характеристичним толерантним предикатом множини $A\subseteq D$ називається предикат $TC(A)=\vee\{\tau_a \mid a\in A\}$.

В силу теореми 1 $TC(A)$ є толерантним.

Лема 5. Нехай $A\subseteq D$. Тоді $TC(A)^T=A$, $TC(A)^F=A^\#$, $TC(A)^l=\varnothing, l\in L\setminus\{T,F\}$.

Доведення. Оскільки предикати τ_d та $TC(A)$ є двозначними предикатами з класу *PBTS,* то $TC(A)^l=\varnothing,\ l\notin\{T,F\}$. Двозначність предикатів спрощує також обчислення інших множин. Зокрема, для $TC(A)$, маємо, що

$$TC(A)^T=(\vee\{\tau_a \mid a\in A\})^T=\cup\{\tau_a{}^T \mid a\in A\}=$$
$$=\cup\{a \mid a\in A\}=A;$$
$$TC(A)^F=(\vee\{\tau_a \mid a\in A\})^F=\cap\{\tau_a{}^F \mid a\in A\}=$$
$$=\cap\{a^\# \mid a\in A\}=A^\#.$$

Характеристичний толерантний предикат *TC(A)* є найкращим толерантним предикатом, який характеризує множину *A* своєю областю істинності. Введемо також характеристичний толерантний предикат для множин $\{A_l \mid l\in L\}, A_l\subseteq D$ такий, що A_l характеризується його областю *l*-значення. Для цього додатково знадобиться усюди невизначений предикат, який позначимо $\perp$. Цей предикат є двозначним толерантним предикатом для якого $\perp^T=\perp^F=\varnothing$.

Означення 11. Характеристичним предикатом множини для нетолерантних *L*-індексованих множин $\{A_l \mid l\in L\}, A_l\subseteq D$ називається предикат вигляду:

$$NF(\{A_l \mid l\in L\})=\vee\{TC(A_l)\wedge\bar{l} \mid l\in L\setminus\{F\}\}\vee$$
$$\vee(\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l\in L\}\wedge\perp).$$

З теореми 1 та леми 4 випливає, що предикат $NF(\{A_l \mid l\in L\})$ є двозначним і толерантним.

Лема 6. Нехай $\{A_l \mid l\in L\}$ – множина нетолерантних *L*-індексованих підмножин *D*. Тоді $NF(\{A_l \mid l\in L\})^k=A_k$, $k\in L$.

Доведення. З означення випливає:

$$NF(\{A_l \mid l \in L\})^k =$$
$$= \{d \mid (\vee\{TC(A_l) \wedge \bar{l} \mid l \in L \setminus \{F\}\} \vee$$
$$\vee (\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp))(d) = k\}.$$

Розглянемо декілька випадків. Якщо $k \notin \{T, F\}$, тоді вираз $(\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp)(d)$ визначений і може приймати значення лише *F*. Зауважимо, що існує єдиний елемент $l \in L$, для якого $(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) = l$, а також існує єдиний елемент $l \in L$, для якого $TC(A_l)(d) = T$. Решта визначена зі значенням *F*. Це означає, що

$$k = \{(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) \mid l \in L \setminus \{F\}\} \vee$$
$$\vee (\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp)(d) = l.$$

Якщо $k = T$, то знайдеться таке *l*, що $(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) = T$. Тобто $TC(A_l)(d) = T$, а це означає, що $d \in A_l$ і $k = l = T$.

Якщо $k = F$, то для будь-якого $l \in L \setminus \{F\}$ маємо, що $(TC(A_l) \wedge \bar{l})(d) \downarrow= F$, а також $\wedge\{\neg TC(A_l) \mid l \in L\} \wedge \perp)(d) \downarrow= F$. З цього випливає, що $TC(A_F)(d) \downarrow= T$, тобто $d \in A_F$.

В результаті отримуємо, що будь-який толерантний предикат однозначно характеризується нетолерантними множинами $A_l \subseteq D, l \in L$, тому він задається формулою $NF(\{A_l \mid l \in L\})$. Ця формула побудована з (символів) всюди невизначеного предиката $\perp$, константних предикатів $\{\bar{l} \mid l \in L\}$ і характеристичних предикатів τ_d, де $d \in D$. Одержуємо наступні твердження.

Теорема 2. Множина предикатів $\{\perp\} \cup \{\tau_d \mid d \in D\} \cup \{\bar{l} \mid l \in L\}$ є системою твірних алгебри $ALTS(PLTS, D, L)$.

Теорема 3. Кожен толерантний предикат $p \in PLTS$ однозначно задається виразом (термом алгебри *ALTS*(*PLTS*, *D*,*L*)): $NF(\{p^l \mid l \in L\})$. Обернено, кожен терм вигляду $NF(\{A_l \mid l \in L\})$, де множини $A_l \subseteq D, l \in L$ є нетолерантними, однозначно задає толерантний предикат.

Висновки

У статті досліджено клас багатозначних предикатів стабільних відносно відношення толерантності. Побудована алгебра таких предикатів, знайдена система її твірних, а також визначена нормальна форма її елементів. В подальших статтях автори планують побудувати коректне та повне екваційне числення толерантних предикатів.

Список використаних джерел

1. *Birkhoff G.* Theory of Lattices / *Birkhoff G.* — Moscow: Nauka, 1984. — 568 p. (In Russian).
2. *Shreider Ju. A.* Equality, Resemblance, and Order / *Shreider Ju.* — Moscow: Nauka, 1975. — 266 p. (In Russian).
3. *Cai Wanjing* Knowledge discovery in tolerance relations / *Cai Wanjing, Li Yongli* // 7th International Conference ICT and Knowledge Engineering. — 2009. — P. 89–93.
4. *Skowron A.* Learning Tolerance Relations by Boolean Descriptors: Automatic Feature Extraction from Data Tables / *Skowron A., Polkowski L., Komorowski J.* // Proc. of the Fourth International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets and Machine Discovery. – Tokyo, Japan. — 1996. — P. 11-17.
5. *Dai Ying.* Image clustering using semantic tolerance relation model / *Dai Ying, Cai Dawei* // Proceedings of the Third IASTED European Conference on Internet and Multimedia Systems and Applications. — 2007. — P. 278-283.
6. *Dasa M.* Fuzzy tolerance relation, fuzzy tolerance space and basis / *Dasa M. Chakrabortyb M.K., Ghoshal T.K.* // Fuzzy Sets and Systems. — Vol. 97. — 1993. — P. 361–369.
7. *Nikitchenko M.S.* Algebras of multivalued equitone predicates / *Nikitchenko M.S., Milko S.I.* // Visn., Ser Fiz-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. — 2004. — N 2. — P. 286-295. (in Ukrainian).
8. *Nikitchenko M.S.* Equational logics of partial predicates stable under tolerance relations / *Nikitchenko M.S., Rossada T.V.* // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences, Kharkov: Apostrophe Pupl. — 2012.

Надійшла до редколегії 03.12.2012