УДК 517.9: 519.7

Сандраков Г.В.[1], д.ф.-м.н., с.н.с.
Базілєва М.І.[2], студентка

Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток

Розглядається спектральна задача на двовимірному та трьохвимірному «струнному хресті» з умовами контакту, умовами натягу та крайовими умовами періодичності та а-періодичності. У результаті розрахунків отримано розв'язок задачі, який формує одновимірний та двовимірний простір для випадку двовимірного струнного хреста та одновимірний та трьохвимірний простір для випадку трьохвимірний струнного хреста.

Ключові слова: спектральна задача, рівняння Матьє, власні функції, модель «струнний хрест»

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: sandraco@mail.ru,
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: mbazileva91@gmail.com

G.V. Sandrakov, Ph.D.
M.I. Bazileva, student

Spectral problem for fragments of grids and lattices

In the article a spectral problem is considerate on two-dimensional and three- dimensional «string cross» with contact, balance, periodicity and a-periodicity boundary conditions. Solutions of the problem what form one—dimensional, two – dimensional space for the case of two-dimensional string cross and one—dimensional, three-dimensional space for the case of three-dimensional string cross, is obtain as result of calculations.

Keywords: spectral problem, Mathieu equation, Eigen functions, model "string cross"

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: sandraco@mail.ru
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: mbazileva91@gmail.com

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Розглядається спектральна задача на хресті та фрагменті решітки. За допомогою методів теорії спеціальних функцій будуть описані всі власні значення та підпростори для цієї задачі. Подібні задачі при відсіченні потенціалу розглядаються у [1]. Результати даної роботи можуть бути використані для усереднення спектральних задач на сітках та решітках.

Визначимо множину Y, як об'єднання двох замкнених натягнутих струн σ_1 та σ_2, які зв'язані у спільній середині та розташованих під прямим кутом відносно одна одної. Струни містяться у прямокутнику $Q = [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^2$. Таку множину Y прийнято називати геометричним графом [2]. Позначимо через C^∞(Y) множину функцій u:$Y\to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y гладких функцій, визначених на прямокутнику Q. Функцію u на струнному хресті будемо розглядати, як набір гладких звужень функції на кожну струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$ та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0,\pi]$ та y_2 із $[0,\pi]$, [1] у відповідності з [1].

1. Для деяких так визначених u_1 та u_2 та деякого числа $q \neq 0$ розглянемо наступну спектральну задачу на цьому хресті:

$$-u_1'' + 2qu_1 \cos 2x = \lambda u_1,$$
$$-u_2'' + 2qu_2 \cos 2x = \lambda u_2, \qquad (1)$$

з наступною умовою зв'язку у вузлі:

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

умовою балансу натягу у спільному вузлі

$$u_1'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - u_1'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) +$$
$$+u_2'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + \left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 0 \qquad (3)$$

та крайовими умовами періодичності та а-періодичності для обох рівнянь, які будуть наведені далі.

Спочатку нагадаємо основні відомості про рівняння Матьє. Для однієї функції y, визначеної на відрізку $[0,\pi]$, такі рівняння мають вигляд

$$-y'' + 2qy\cos 2x = \lambda y, q \neq 0, \quad (4)$$

де λ позначає спектральний параметр.

Розглянемо рівняння (4) з граничними умовами Діріхлє

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Цим умовам відповідає множина злічених дійсних власних значень, які позначаються $B = \{b_n\}_{n=1,2,...}$. Для кожного такого $\lambda \epsilon B$ власна функція (4) позначається так

$$se_n(x,q) \quad (5)$$

Такі функції називають непарними розв'язками Матьє [3].

Для *n=2k+1, k=0,1,2…* функції (5) мають період 2π. Відповідно для *n=2k, k=1,2…* функції (5) мають період π.

Рівняння (4) з граничними умовами Неймана

$$y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

має множину злічених дійсних власних значень позначається $A = \{a_n\}_{n=1,2,...}$.

Для кожного такого $\lambda \epsilon$ A власна функція (4) позначається так

$$ce_n(x,q) \quad (6)$$

Для *n=2k+1, k=0,1,2…* функції (6) мають період 2π. Відповідно для *n=2k, k=0,1,2…* функції (6) мають період π.

Розв'язки вигляду (6) отримали назву парних розв'язків Матьє.

Інколи рівняння (4) називають загальним рівнянням Матьє. Власні значення та функції рівняння (4) називають значеннями та функціями Матьє [3].

Відомо [3], що визначені власні значення Матьє a_n та b_n впорядковуються наступним чином

$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots,\ q > 0$, та
$a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < \cdots, q < 0$.

Розв'язок рівняння Матьє, що відповідає власному значенню a_n(b_n) має n нулів на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$.

Розглянемо множину власних функцій

$$\begin{array}{lll} ce_k(x,q), & k = 2n+1, & n = 0,1\ldots, \\ se_k(x,q), & k = 2n, & n = 1,2\ldots \end{array}$$

Такі функції, у відповідності з [3], у точці $x = \frac{\pi}{2}$ приймають значення $y(\frac{\pi}{2})=0$.

Відповідні функції Матьє

$$\begin{array}{lll} ce_k(x,q), & k = 2n, & n = 0,1\ldots \\ se_k(x,q), & k = 2n+1, & n = 0,1,2\ldots \end{array}$$

у точці $x = \frac{\pi}{2}$ приймають значення $y(\frac{\pi}{2})\neq 0$.

Розглянемо непарні функції Матьє з номерами *n=2k, k=1,2…*, що мають період π. Граничні умови для цих функцій записуються в такому вигляді [4]:

$$\begin{aligned} u(0) &= u(\pi), \\ u'(0) &= u'(\pi). \end{aligned} \quad (9)$$

Такі умови називаються періодичними умовами.

Непарні функції Матьє з номерами n=2k+1, k=0,1,2… мають період 2π. Граничні умови для цих функцій записуються в такому вигляді [4]:

$$\begin{aligned} u(0) &= -u(\pi) \\ u'(0) &= -u'(\pi) \end{aligned} \quad (10)$$

Такі умови називаються аперіодичними умовами. Парні функції Матьє з номерами *n=2k+1, k=0,1,2…* мають період 2π та визначаються граничними умовами (10). Парні функції Матьє з номерами *n=2k, k=0,1,2…* мають період π та визначаються граничними умовами (9).

Теорема 1. Кожне власне значення задачі (1)-(3) з умовами (9) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k, k=1,2,… або* $\lambda = a_0$.

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та n=2k, *k=1,2,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mse_n \text{ та } u_2 = Kse_n.$$

Якщо $\lambda = a_n$ для деякого $a_n \in A$ та *n=2k, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n \text{ та } u_2 = Mce_n.$$

Тут *M, K* позначають довільні сталі.

Доведення. Через те, що за визначенням у обох рівняннях (1) значення λ однакове, то розв'язком відповідних рівнянь буде деяка власна функція Матьє, тобто розв'язки будуть мати вигляд для непарних функцій

$$u_1 = M_1 se_n, u_2 = M_2 se_n$$

відповідно, для парних функцій

$$u_1 = L_1 ce_n, u_2 = L_2 ce_n$$

де *n=2k, k=1,2,…* та M_1, M_2, L_1, L_2 – деякі сталі.

З умови зв'язку (2) випливає, що:

$$M_1 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_2 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$L_1 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = L_2 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Оскільки $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому маємо $L_1 = L_2$. Позначимо ці константи через М. Знайдені розв'язки формують одновимірний простір. Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, тому константи M_1, M_2 можуть набувати довільних значень. Такі розв'язки формують двовимірний простір.

Умова (3) буде виконана за рахунок гладкості функції. Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

Розглянемо задачу (1)-(3) з крайовими умовами (10). Тоді маємо теорему:

Теорема 2. Кожне власне значення задачі (1)-(3) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k+1, k=0,1,…*

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та *n=2k+1, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (10) будуть наступні функції

$$u_1 = M se_n \text{ та } u_2 = M se_n.$$

Якщо $\lambda = a_n$ для деякого $a_n \in A$ *n=2k+1, k=0,1,…*, тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (10) будуть наступні функції

$$u_1 = M ce_n \text{ та } u_2 = K ce_n.$$

Тут *M, K* позначають довільні сталі.

Доведення. За аналогією до розглянутого вище доведення отримаємо загальні розв'язки для парних функцій

$$u_1 = K_1 ce_n, u_2 = K_2 ce_n,$$

відповідно, для непарних функцій

$$u_1 = N_1 se_n, u_2 = N_2 se_n,$$

де *n=2k+1, k=1,2,…* та K_1, K_2, N_1, N_2 – деякі сталі. То з умови зв'язку (2) випливає:

$$K_1 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = K_2 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$N_1 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = N_2 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Оскільки $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, тому константи, K_1, K_2 можуть набувати довільних значень. З цього випливає, що розв'язки формують двовимірний простір.

Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому $N_1 = N_2$. Позначимо ці константи через *M*. Знайдені розв'язки формують одновимірний простір

Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

2. Розглянемо також трьохвимірну задачу.

Визначимо множину *Y*, як об'єднання трьох замкнених натягнутих струн σ_1, σ_2 та σ_2, які зв'язані у спільній середині та розташованих під прямим кутом відносно одна одної (рис.).

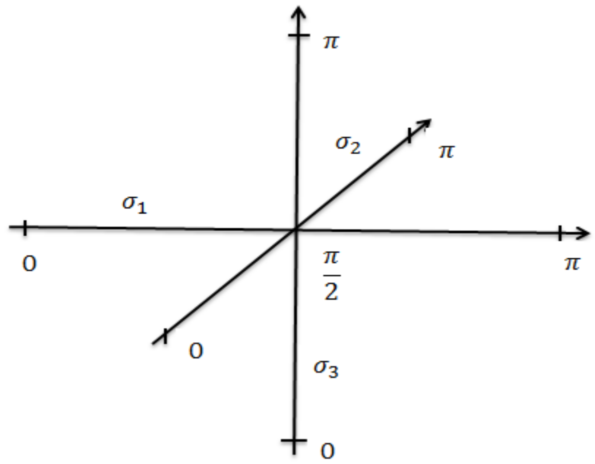

Рис. Трьохвимірна система струн.

Позначимо через $C^{\infty}(Y)$ множину функцій u: $Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на *Y* гладких функцій, визначених на прямокутнику Q. Функцію u на такому трьохвимірному хресті будемо розглядати, як набір гладких звужень функції на кожну струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$, $u_3(y_3)$, та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0,\pi]$, y_2 із $[0,\pi]$ та y_3 із $[0,\pi]$. [2]. Тоді можливо розв'язати спектральну задачу відносно таких функцій u_1, u_2, u_3 для наступної системи

$$\begin{aligned} -u_1'' + 2qu_1 \cos 2x &= \lambda u_1, \\ -u_2'' + 2qu_2 \cos 2x &= \lambda u_2, \\ -u_3'' + 2qu_3 \cos 2x &= \lambda u_3, \end{aligned} \qquad (11)$$

з умовою зв'язку у вузлі

$$u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (12)$$

та балансу натягу у спільному вузлі

$$\begin{aligned} &u_1'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - u_1'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \\ &+u_2'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + u_2'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \\ &+u_3'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + u_3'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Будемо розглядати цю задачу за аналогією до двовимірного випадку. Розглянемо задачу (11)-(13) з крайовими умовами (9).

Теорема 3. Кожне власне значення задачі (11)-(13) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k, k=1,2,… або* $\lambda = a_0$

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та *n=2k, k=1,2,…,* тоді розв'язками задачі (11)-(13) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mse_n, u_2 = Kse_n \text{ та } u_3 = Lse_n$$

Якщо $\lambda = a_n$, $a_n \in A$ та *n=2k, k=0,1,…,* тоді розв'язками задачі (11)-(13) з умовами (9) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n, u_2 = Mce_n, \text{ та } u_3 = Mce_n.$$

Тут M, K, L позначають довільні сталі.

Доведення. Загальний розв'язок системи (11) буде мати вигляд для непарних функцій:

$$u_1 = M_1 se_n, \ u_2 = M_2 se_n, \ u_3 = M_3 se_n,$$

де *n=2k, k=1,2,…*

Відповідно, для парних функцій:

$$u_1 = L_1 ce_n, \ u_2 = L_2 ce_n, \ u_3 = L_3 ce_n$$

де *n=2k, k=0,1,…*

З умови зв'язку (12) випливає, що:

$$M_1 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_2 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_3 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$L_1 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = L_2 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = L_3 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Оскільки $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому, $L_1 = L_2 = L_3$. Позначимо ці константи через M. Такі розв'язки формують одновимірний простір. Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, константи M_1, M_2, M_3 приймають довільні значення. Описані розв'язки формують тривимірний простір. Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

Розглянемо задачу (11)-(13) з крайовими умовами (10).

Теорема 4. Кожне власне значення задачі (11)-(13) має вигляд $\lambda = b_n$ або $\lambda = a_n$, де $b_n \in B$, а $a_n \in A$ для *n=2k+1, k=0,1,…*

Якщо $\lambda = b_n$ для деякого $b_n \in B$ та *n=2k+1, k=0,1,…,* тоді розв'язками задачі (11)-(13) з умовами (10) будуть наступні функції $u_1 = Mse_n$, $u_2 = Mse_n$ та $u_3 = Mse_n$.

Якщо $\lambda = a_n$ для деякого $a_n \in A$ *n=2k+1, k=0,1,…,* тоді розв'язками задачі (1)-(3) з умовами (10) будуть наступні функції

$$u_1 = Mce_n, u_2 = Kce_n \text{ та } u_3 = Lce_n.$$

Тут M, K ,L позначають довільні сталі.

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1 отримаємо загальні розв'язки рівнянь (11) для непарних функцій

$$u_1 = K_1 ce_n, u_2 = K_2 ce_n, u_3 = K_3 ce_n,$$

відповідно, для парних функцій

$$u_1 = N_1 se_n, u_2 = N_2 se_n, u_3 = N_3 se_n,$$

де *n=2k+1, k=0,1,…*

То з умови зв'язку (12) випливає:

$$K_1 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = K_2 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = K_3 ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$N_1 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = N_2 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = N_3 se_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Через те, що $ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, константи K_1, K_2, K_3 набувають довільних значень. З цього випливає, що розв'язки формують трьохвимірний простір. Оскільки $se_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, тому $N_1 = N_2 = N_3$. Позначимо ці константи через M. Знайдені розв'язки формують одновимірний простір.

Таким чином, знайдені всі можливі власні значення та функції. Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Krylova A.S. Homogenization of spectral problem on small-periodic networks/ A.S. Krylova, G.V. Sandrakov // Jornal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2012. - № 3(109). 336-356 p.
2. Pokornyi Yu. V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Differential Equations on Geometric Graphs. – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 272p. (in Russian).
3. Zaytsev V. F., Handbook of Ordinary Differential Equations. – Moscow: Fizmatlit, 2001. – 576 p. (in Russian).
4. Yanke E., Emde F., Lesch F., Special functions: formulas, charts, tables – Moscow:Nauka, 1964.– 344 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 29.01.13