УДК 519.21

Хімка У.Т.[1], аспірант,
Чабанюк Я.М[2], д.ф.-м.н., проф.,
Семенюк С.А.[2], к.ф.-м.н.

Флуктуації процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації

У даній роботі досліджено флуктуації процедур стохастичної оптимізації з імпульсним та дифузійним збуренням. Встановлено слабку збіжність двокомпонентного процесу, складеного нормованим імпульсним збуренням та флуктуацією процедури стохастичної оптимізації. Побудовано генератори граничних процесів.

Ключові слова: флуктуації процедури стохастичної оптимізації, марковський процес, імпульсне збурення, дифузійне збурення

[1] Національний університет "Львівська політехніка", 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: ulyana.himka@gmail.com,
[2] Національний університет "Львівська політехніка", 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail:yaroslav_chab@yahoo.com.,

U.T.Khimka[1], postgraduate student,
Ya.M.Chabanyuk[2], Ph.D.
S.A.Semenyuk[2], Ph.D.

Fluctuations of Stochastic Optimization Procedure in Diffusion Approximation Scheme

This paper investigates the fluctuations of stochastic optimization procedures with a pulse and diffusion perturbation. Established weak convergence of the two-component process, the composite normalized pulse perturbation and fluctuation stochastic optimization procedures. Powered Generators boundary processes.

Key Words: fluctuation of stochastic optimization procedure, Markov process, impulse perturbation, diffusion perturbation.

[1] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: ulyana.himka@gmail.com,

[2] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В. В.

Вступ

Однією з проблем системного аналізу складних систем за умов невизначеності, що описується марковським процесом, є встановлення збіжності флуктуації процедур стохастичної оптимізації (ПСО) до дифузійного процесу в випадку безпосереднього впливу функції регресії від марковських переключень.

Численні приклади застосування таких процедур та їх модифікацій в теорії керування, теорії передачі повідомлень, при розв'язку непараметричних задач математичної статистики, зокрема при встановленні найкращих значень параметрів асимптотично нормального розподілу процедури стохастичної оптимізації, визначають важливість встановлення нових узагальнень та властивостей ПСО.

1. Постановка задачі

Різницева процедура стохастичної оптимізації в ергодичному марковському середовищі з імпульсним збуренням задається еволюційним рівнянням:

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)[\nabla_{b(t)} C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t)], \quad (1)$$

де $a(t) = \dfrac{a}{t}$, $a > 0$,

$$\nabla_{b(t)} C(u,x) = \frac{1}{2b(t)}[C(u+b(t),x) - C(u+b(t),x)],$$

.

$C(u,\cdot) \in C^3(R))$

Марковський процес $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається генератором [1]:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \quad (X),$$

де (X) - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум - нормою $\| \varphi \| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$ із стаціонарним розподілом $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Потенціальний оператор R_0 генератора $\mathbf{Q}$ визначається співвідношенням:

$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ задається співвідношеннями:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^2)); \tag{2}$$

де сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$ задається генераторам:

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_w(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)]\Gamma(dv;x),$$

$x \in X$.

Нехай виконуються умови балансу

$$\Pi\mathbf{\Gamma}_1(x) = \int_X \pi(dx)b_1(x) = 0, b_1(x) = \int_R v\Gamma(dv,x), \tag{3}$$

$$\Pi C'(0,x) = \int \pi(dx)C'(0,x) = 0, \tag{4}$$

Нормоване імпульсне збурення задається співвідношенням:

$$\mu^\varepsilon(t) = a\int_{t_0}^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^2))/s^{\frac{1}{2}};$$

Розглянемо флуктуацію ПСО (1) у вигляді

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}t^{\frac{1}{2}}[u^\varepsilon(t) - \varepsilon\mu^\varepsilon(t)] \tag{5}$$

2. Теорема про збіжність флуктуацій ПСО з імпульсним збуренням

Теорема 1 . *При виконанні умов балансу (3) та (4), а також умови збіжності ПСО (1) має місце слабка збіжність*

$$(v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t)) \to (\zeta(t), \sigma(t)W(t)), t > 0, \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний процес $(\zeta(t), \sigma(t)W(t))$ *задається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + act^{\frac{1}{2}}w\right]\varphi'_v(v,w) +$$

$$+\frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v,w),$$

де

$$c_2 = \int_X \Pi(dx)C''(0,x),$$

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t) + B_3(t),$$

$$B_1(t) = \int_X \pi(dx)b_2(x) + 2at^{-\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x);$$

$$b_2(x) = \int_R v^2\Gamma(dv,x);$$

$$B_2(t) = 2a[\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0C'(0,x) +$$

$$+\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0b_1(x)];$$

$$B_3(t) = 2at^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x).$$

Лема 1. *Генератор* $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) + \varepsilon\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w),$$

де

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w);$$

$$\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w),$$

а залишковий член такий, що $\|\varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. За означенням генератора маємо

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w+\varepsilon v) - \varphi(w)]\Gamma(dv, x)$$

Використаємо розклад в ряд Тейлора функції φ та отримаємо

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w) + \varepsilon v\varphi'(w) +$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2\varphi''(w) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) - \varphi(w)]\Gamma(dv, x)$$

$$= \varepsilon^{-2}\int_R (\varepsilon v\varphi'(w)\Gamma(dv,x) + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\int_R \varepsilon^2 v^2\varphi''(w)\Gamma(dv,x) +$$
$$+\varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1}b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) =$$
$$= \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w).$$

Лема 2. *Нормована флуктуація (5) задовольняє диференціальному рівнянню*

$$dv^{\varepsilon}(t) = C_t^{\nabla,\varepsilon}(v^{\varepsilon}(t), x_t^{\varepsilon})dt, \qquad (6)$$

де

$$C_t^{\nabla,\varepsilon}(v,x) = \varepsilon^{-1}a\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x) + \frac{1}{2}vt^{-1},$$

а $z = t^{-\frac{1}{2}}v + w; v = v^{\varepsilon}(t), w = \mu^{\varepsilon}(t)$.

Доведення. З диференціювання (5) та використання (1) отримуємо (6).

Зауважимо, що рівняння (6) породжує напівгрупу операторів $\mathbf{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^{\varepsilon}(t+s))$, $v_x^{\varepsilon}(s) = v$, з генератором

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = C^{\nabla,\varepsilon}(v,x)\varphi'(v). \qquad (7)$$

Лема 3. *Генератор (7) має асимптотичне представлення на тест-функціях*

$$\varphi(v) \in C^2(R), C_t(u,\cdot) \in C^3(R)$$

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}aC'(0,x)\varphi'(v) +$$
$$+((avt^{-\frac{1}{2}} + aw)C''(0,x) +$$
$$+\frac{1}{2}t^{-1}v)\varphi'(v) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi'(v), \qquad (8)$$

де $\theta^{\varepsilon}(x)\varphi'(v)$ *рівномірно обмежена по* x *та по* v *функція.*

Доведення. Для генератора (7) маємо перетворення:

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}a\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z, x)\varphi'(v) + \frac{1}{2}vt^{-1}\varphi'(v) =$$
$$= \varepsilon^{-1}a\left[C'(0,x) + \varepsilon zC''(0,x) + O(\varepsilon^3)\right]\varphi'(v) +$$
$$+\frac{1}{2}vt^{-1}\varphi'(v)$$

Таким чином, звівши доданки по степенях ε, одержимо (8).

Лема 4. *Генератор трьохкомпонентного марковського процесу*

$$v^{\varepsilon}(t) = v_t, \mu^{\varepsilon}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^2) = x_t^{\varepsilon}, t \ge 0 \qquad (9)$$

має аналітичний вигляд

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = [\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x) + \mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)]\varphi(v,w,x),$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання:

$$E[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta), \mu^{\varepsilon}(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^2)) -$$
$$-\varphi(v^{\varepsilon}(t), \mu^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)) \mid v^{\varepsilon}(t) = v, \mu^{\varepsilon}(t) =$$
$$= w, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$
$$= E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,w,x)] =$$

$$= E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] +$$
$$+ E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,w,x)].$$

Згідно означення генератора марковського процесу (9) та останнього представлення, одержуємо

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta), \mu^{\varepsilon}(t+ \qquad (7)$$
$$+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^2)) -$$
$$-v^{\varepsilon}(t), \mu^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)) \mid v^{\varepsilon}(t) = v, \mu^{\varepsilon}(t) =$$
$$= w, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] +$$
$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)]$$

Перша границя визначає генератор (8) еволюції v, а друга границя дає генератор двокомпонентного марковського процесу

$$\mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), t \ge 0.$$

Оскільки має місце представлення:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x_{t+\Delta})] =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)],$$

то враховуючи

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x_{t+\Delta})] =$$
$$= at^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(\mathbf{x})\varphi(v, w, x),$$

та

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v, w, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] =$$
$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi(v, w, x),$$

отримаємо

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v, w, x) = \left[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x) + \mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\right]\varphi(v, w, x)$$

Лема 5. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon$ *допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v, w, x) = (\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}(at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}_1(x) + a\mathbf{C}_1(x)) +$$
$$+ at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}_2(x) + (at^{-\frac{1}{2}}(v + t^{\frac{1}{2}}w)\mathbf{C}_2(x) + \frac{1}{2}t^{-1}vD(x)) +$$
$$+ \theta_L^\varepsilon(x))\varphi(v, w, x), \qquad (10)$$

де

$$\mathbf{C}_1(x)\varphi(v, w, x) = C'(0, x)\varphi'_v(v, w, x);$$

$$\mathbf{C}_2(x)\varphi(v, w, x) = C''(0, x)\varphi'_v(v, w, x);$$

$$\mathbf{D}\varphi(v, w, x) = \varphi'_v(v, w, x);$$

а залишковий член такий, що $\| \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v, w, x) \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Доведення випливає з представлення генераторів $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)$ та $\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)$.

Для генератора (10) розглянемо зрізаний оператор:

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(x) + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(x), \qquad (11)$$

де

$$\mathbf{Q}_1(x) = \mathbf{\Gamma}_1(x) + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x),$$
$$\mathbf{Q}_2(x) = \mathbf{\Gamma}_2(x) + (v + t^{-\frac{1}{2}}w)\mathbf{C}_2(x) + \frac{1}{2at^{\frac{1}{2}}}v\mathbf{D}.$$

Лема 6. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (11) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(v, w, x) = \varphi(v, w) + \varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\varphi_1(v, w, x) +$$
$$+ \varepsilon^2 t^{-\frac{1}{2}}\varphi_2(v, w, x)$$

в умовах теореми реалізується співвідношенням

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v, w, x) = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi(v, w) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(v, w),$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon(x)$ *рівномірно обмежений по* x, *а граничний оператор* $\mathbf{L}$ *визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{L}\Pi = a\Pi\mathbf{Q}_2(x)\Pi + a^2t^{-\frac{1}{2}}\Pi\mathbf{Q}_1(x)R_0\mathbf{Q}_1(x)\Pi.$$

Доведення. Розглянемо вигляд генератора $\mathbf{L}^\varepsilon$ на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v, w, x)$, а саме

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}t^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{Q}\varphi_1 + a\mathbf{Q}_1(x)\varphi] +$$
$$+ at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(x)\varphi + at^{-1}\mathbf{Q}_1(x)\varphi_1 + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\varphi_2 + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi.$$

Оскільки φ не залежить від x, то

$$\mathbf{Q}\varphi = 0, \Leftrightarrow \varphi \in N_Q.$$

Умови балансу (3) та (4) визначають розв'язність рівняння:

$$\mathbf{Q}\varphi_1 + a\mathbf{Q}_1(x)\varphi = 0.$$

Отже,

$$\varphi_1 = aR_0\mathbf{Q}_1(x)\varphi. \qquad (12)$$

Таким чином, враховуючи (12), отримуємо представлення:

$$t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\varphi_2 + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}(x)\varphi = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi,$$

де

$$\mathbf{L}(x)\varphi = a\mathbf{Q}_2(x)\varphi + a^2t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(x)R_0\mathbf{Q}_1\varphi.$$

Для φ_2 маємо представлення

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0[\mathbf{L}(x) - \mathbf{L}]\varphi. \qquad (13)$$

Через те, що

$$\Theta^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(v,w,x) = at^{-1}\mathbf{Q}_1\varphi_2(v,w,x) + $$
$$+ at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2\varphi_1(v,w,x) + at^{-1}\mathbf{Q}_2\varphi_2(v,w,x)$$

та враховуючи (12) і (13), а також гладкість функції $\varphi(v,w)$, отримуємо твердження леми про залишковий член.

Завершення доведення теореми.

Обчислимо граничний оператор $\mathbf{L}$, враховуючи (12) та (13) та дію операторів $\mathbf{Q}_1(x)$ та $\mathbf{Q}_2(x)$.

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = a\Pi\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(v,w) + a(v +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}w)\Pi\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w) +$$
$$+ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}v\mathbf{D}\varphi(v,w) + a^2t^{-\frac{1}{2}}\Pi[\mathbf{\Gamma}_1(x) +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x)]R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x) + t^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x)]\varphi(v,w) =$$

$$= a\int_X \pi(dx)b_2(x)\varphi''_w(v,w) + a(v +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}w)\int_X \pi(dx)C''(0,x)\varphi'_v(v,w) +$$
$$+ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}v\varphi'_v(v,w) +$$
$$+ a^2t^{-\frac{1}{2}}(\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x)\varphi''_w(v,w) +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0C'(0,x)\varphi''_{vw}(v,w) +$$
$$+ t^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0b_1(x)\varphi''_{vw}(v,w) +$$
$$+ t^1\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x)\varphi''_v(v,w)).$$

Отже,

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + act^{\frac{1}{2}}w\right]\varphi'_v(v,w) +$$
$$+ \frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v,w),$$

де

$$B(t)\varphi''(v,w) = B_1(t)\varphi''_w(v,w) + B_2(t)\varphi''_w(v,w) +$$
$$+ B_3(t)\varphi''_w(v,w),$$

$$B_1(t) = 2\int_X \pi(dx)b_2(x) + 2at^{-\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x);$$

$$B_2(t) = 2a[\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0C'(0,x) +$$
$$+ \int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0b_1(x)];$$

$$B_3(t) = 2at^{\frac{1}{2}}\int_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x).$$

Завершення доведення теореми проводиться за допомогою Модельної граничної теореми Королюка [2].

3. Флуктуації ПСО з дифузійним збуренням

Розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації [3]:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))dt, \qquad (14)$$

з функцією регресії

$$C^\varepsilon(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2)) + \varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2)),$$

$u \in R, x \in X$.

Усереднена система

$$\frac{du}{dt} = C'(u), C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x).$$

Умови балансу

$$\int_X \pi(dx)C_0(u,x) = 0, \int_X \pi(dx)C'(0,x) = 0. \qquad (15)$$

Позначимо через $C_0^0(x) = C_0(0,x)$, тоді дифузійне збурення [4] в точці екструмуму набуде вигляду:

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} a \int_{t_0}^{t} C_0(0, x(t/\varepsilon^2))/s^{\frac{1}{2}} ds = \varepsilon^{-1} a \int_{t_0}^{t} C_0^0(x(t/\varepsilon^2))/s^{\frac{1}{2}} ds.$$

Розглянемо флуктуації ПСО (14) в наступному нормуванні

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} t^{\frac{1}{2}} \left[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)\right].$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови балансу (15), а також умови збіжності ПСО (14). Також нехай функції* $C_0'(u,x)$ *і* $C_0''(u,x)$ *рівномірно обмежені по* x

$$\sup_{x \in X} \| C_0'(u,x) \| \le C_1 < +\infty;$$

$$\sup_{x \in X} \| C_0''(u,x) \| \le C_2 < +\infty.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$(v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t)) \to (\zeta(t), W_\sigma(t)), t > 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний процес $(\zeta(t), W_\sigma(t))$ *задається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}) + ac_2 t^{-\frac{1}{2}} w \right] \varphi_v'(v,w) +$$

$$+ \frac{a t^{-\frac{1}{2}}}{2} B \varphi_w''(v,w),$$

де

$$c_2 = \int_X \pi(dx) C''(0,x);$$

$$B = 2 \int_X \pi(dx) C_0(0,x) R_0 C_0(0,x).$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення попередньої теореми з використанням наступних ключових тверджень.

Лема 7. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon$ *допускає асимптотичне представлення на тест-функціях* $\varphi(v) \in C^4(R)$

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(v,w,x) = \Big[\varepsilon^{-2} \mathbf{Q} + \varepsilon^{-1} a t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}^0(x) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} a \mathbf{C}(x) + a t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}_t^1(x) + \theta_L^\varepsilon(x) \Big] \varphi(v,w,x),$$

де

$$\mathbf{C}^0(x)\varphi(v,w,x) = C_0^0(x) \varphi_w'(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(v,w,x) = \left[C(0,x) + z C_0'(0,x)\right] \varphi_v'(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}_t^1(x)\varphi(v,w,x) = (t^{\frac{1}{2}} z \left[C'(0,x) + z C_0''(0,x)/2\right] +$$

$$+ \frac{v}{2a} t^{\frac{1}{2}}) \varphi_v'(v,w,x), \quad z = t^{-\frac{1}{2}} v + w,$$

а залишковий член такий, що
$\| \theta_L^\varepsilon(x) \varphi(v,w,x) \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Лема 8. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора в умовах теореми реалізується співвідношенням*

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) = t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{L}\varphi(v,w) + \varepsilon \theta^\varepsilon(x) \varphi(v,w),$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon(x)$ *рівномірно обмежений по* x. *Граничний генератор визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{L}\Pi = a \Pi \mathbf{C}_t^1(x) \Pi + a^2 t^{-\frac{1}{2}} \Pi \quad ^0(x) R_0 \quad ^0(x) \Pi.$$

Висновки

Флуктуації ПСО з імпульсним збуренням при наявності точки рівноваги на зростаючих інтервалах часу описуються стохастичним диференціальним рівнянням, дифузійна складова якого формується як з першого та другого моментів імпульсного процесу, так і з швидкості зміни функції регресії в точці рівноваги.

Література

1. Korolyuk V. S., Korolyuk V .V. Stochastic Models of Systems. - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. - 185p.

2. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space, - World Scientific Publishing, 2005. - 330P.

3. Chabanyuk Ya. M. Continuous stochastic approximation procedure with singular perturbations in balance conditions. //Cibernetic and system analisys.- 2006. - №3. - p. 133-139.

4. Semenyuk S. A. Fluctuations of stochastic approximation procedure with diffusion perturbations. / Semenyuk S. A., Chabanyuk Ya. M. // Cibernetic and system analisys. - 2008.- no.5. - p.104-109.

Надійшла до редколегії 28.01.2013