УДК 519.9

Кандрьонкін А.В.[1], аспірант,
Перестюк М.М.[2], студент

Якісна поведінка розв'язків нелокального рівняння Чаффе-Інфанте.

У роботі розглядається рівняння Чаффе-Інфанте з нелокальною нелінійністю, що не забезпечує єдиність розв'язку задачі Коші. На всіх слабких розв'язках побудовано м-напівпотік, для якого встановлено існування глобального атрактору.

Ключові слова: глобальний атрактор, м-напівпотік, рівняння Чаффе-Інфанте.

[1]Київський національний університет імекні Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64
[2]Київський національний університет імекні Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64

Kandrenkin A.V.[1], post-graduate student,
Perestyuk M.M.[2], student

Long-time behavior of solutions of nonlocal Chafee-Infante equation.

In the paper we consider Chafee-Infante equation with nonlocal nonlinear term, which does not guarantee uniqueness of Cauchy problem. On all weak solutions we construct m-semiflow and prove an existence of global attractor.

Keywords: global attractor, m-semiflow, Chafee-Infante equation.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.В.Козаченко

Вступ

Дослідження якісної поведінки нелінійних дисипативних еволюційних рівнянь прийнято пов'язувати з вивченням властивостей глобального атрактору [1,2]. У випадку неєдиності розв'язку задачі Коші відповідні узагальнення для многозначних напівгруп (м-напівптоків) зроблено в [3,4]. В даній роботі з точки зору теорії глобальних атракторів досліджено якісну поведінку розв'язків рівняння Чаффе-Інфанте з нелокальним нелінійним доданком [5], що не забезпечує єдиності розв'язку задачі Коші.

Постановка задачі.

В обмеженій області $\Omega \subset R^n$ з гладкою межею розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \lambda(u^3 - u) + \int\limits_{\Omega} f(x, u(t,x))dx, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\lambda > 0$ - константа, $f : \Omega \times R \to R$ є функцією типу Каратеодорі, тобто вимірною по першій змінній і неперервною по другій змінній, причому

$$| f(x,v) | \le C_1(x) + C_2(x) | v |, \qquad (2)$$

де $C_1 \in L^1(\Omega), C_2 \in L^2(\Omega)$ - задані невід'ємні майже скрізь (м.с.) функції.

При цьому на функцію f не накладається умов типу монотонності або ліпшицевості, що не дозволяє стверджувати єдиність розв'язку. Якщо $f(x,v) \equiv f(x)$, то (1) перетворюється на класичне рівняння Чаффе-Інфанте, динаміка розв'язків якого вивчена в [1].

Розв'язком (1) будемо називати функцію $u \in L^2_{loc}(0,+\infty; H^1_0(\Omega)) \bigcap L^4_{loc}(0,+\infty; L^4(\Omega))$, що $\forall T > 0,\ \forall v \in H^1_0(\Omega) \bigcap L^4(\Omega),\ \forall \eta \in C^\infty_0(0,T)$ задовольняє інтегральну рівність

$$-\int_0^T (u,v)\eta_t dt + \int_0^T ((\nabla u, \nabla v)\eta + \lambda(u^3 - u, v)\eta - (f(x,u),1))\eta dt = 0, \qquad (3)$$

де

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,\ \|u\|=\sqrt{(u,u)}$$

скалярний добуток і норма в $H=L^2(\Omega)$, що є фазовим простором задачі (1).

Якщо u розв'язок (1), то $\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2_{loc}(0,+\infty;H^{-1}(\Omega))+L^{4/3}_{loc}(0,+\infty;L^{4/3}(\Omega))$, отже [2] $u\in C([0,+\infty);L^2(\Omega))$ і м.с. виконується енергетична рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2=-a\|\nabla u(t)\|^2-\\ -\lambda(u^3-u,u)+(f(x,u(t,x)),1). \tag{4}$$

Нехай W - це множина всіх розв'язків (1), причому

1) $\forall u_0\in H\ \ \exists u\in W: u(0)=u_0$;
2) $\forall u\in W\ \ \forall s\geq 0\ u(\cdot+s)\in W$.

Тоді відображення $G:[0,+\infty)\times H\mapsto 2^H$, що визначається рівністю

$$G(t,u_0)=\{u(t)\,|\,u\in W,\ u(0)=u_0\} \tag{5}$$

є многозначною напівгрупою [4].

Основною метою роботи є доведення існування у м-напівпотоку G глобального атрактору, тобто існування компакту $A\subset H$ такого, що

1) $A=G(t,A)\ \ \forall t\geq 0;$
2) для довільної обмеженої множини $B\subset H$
$$dist(G(t,B),A)\to 0,\ t\to+\infty.$$

Основні результати.

Лема. *Для довільного* $u_0\in H$ *задача (1) має принаймні один розв'язок* u *такий, що* $u(0)=u_0$.

Доведення. Існування розв'язку встановимо методом Галеркінських апроксимацій. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ - ОНБ в $L^2(\Omega)$, що складається з гладких власних функцій оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$. Апроксимації задаються формулою $u^N(t,x)=\sum_{j=1}^{N}c_j^N(t)w_j(x)$, де набір $\{c_j^N\}_{j=1}^{N}$ є розв'язком задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}c_j^N(t)+a\lambda_j c_j^N(t)+\\ +\lambda\int_\Omega((u^N(t,x))^3-u^N(t,x))w_j(x)dx-\\ -\int_\Omega f(x,u^N(t,x))dx=0,\ j=1,...,N,\\ u^N(0)\to u_0 \text{ в } H. \tag{6}$$

Функція $r\mapsto\int_\Omega f(x,rw(x))dx$ для $w\in H$ є неперервною в силу теореми Лебега, отже за теоремою Пеано задача Коші (6) має розв'язок, визначений на $[0,T_N]$. Домножимо (6) на c_j^N і підсумуємо по $1\leq j\leq N$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2+a\|\nabla u^N(t)\|^2+\\ +\lambda((u^N)^3-u^N,u^N)-(f(x,u^N),1)(u^N,1)=0. \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2+a\|\nabla u^N(t)\|^2+\\ \frac{\lambda}{2}\int_\Omega(u^N(t,x))^4dx\leq\frac{\lambda}{2}|\Omega|+\int_\Omega|u^N(t,x)|dx\times\\ \times\int_\Omega(|C_1(x)|+|C_2(x)||u^N(t,x)|)dx.$$

Тоді існує константа $C>0$ така, що

$$\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2+a\|\nabla u^N(t)\|^2+\\ +\lambda\int_\Omega(u^N(t,x))^4dx\leq C+\|C_2\|\|u^N\|^2. \tag{8}$$

Далі з (8) і нерівності Гронуола стандартно одержуємо [4], що $T_N=\infty$ і послідовність u^N збігається до розв'язку (1). Лема доведена.

Ця лема гарантує непорожність класу W, виконання умов 1),2), а отже, коректність означення м-напівпотоку (5).

Теорема. *Нехай виконується нерівність*

$$a\lambda_1>\|C_2\|, \tag{9}$$

де $\lambda_1>0$ *- це перше власне значення оператора* $-\Delta$ *в* $H_0^1(\Omega)$.

Тоді для м-напівпотоку (5) існує глобальний атрактор $A\subset H$, *який є стійкою підмножиною фазового простору* H *і складається з обмежених повних траєкторій, тобто виконується вкладення*

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \;\; \forall \, t \geq 0 \; G(t, O_\delta(A)) \subset O_\varepsilon(A)$,

і для кожного $\xi \in A$ *існує* $u : R \mapsto H$,

$$u(t+s) \in G(s, u(t)) \; \forall t \in R, \; \forall s \geq 0,$$

таке, що $u(0) = \xi$.

Доведення. Легко показати, що м-напівпоттік (5) є строгим, тобто $\forall t, s \geq 0 \; \forall v \in H \quad G(t+s, v) = G(t, G(s, v))$. Крім того, з умови (9), енергетичної рівності (4) і нерівності Пуанкаре маємо оцінку: існує константа $\delta > 0$ така, що

$$\frac{d}{dt} \| u(t) \|^2 + \delta(\| \nabla u(t) \|^2 + \| u(t) \|^2) + +\lambda \int_\Omega u^4(t,x) dx \leq C. \tag{10}$$

Звідси $\forall t \geq 0 \;\; \forall u \in W$

$$\| u(t) \|^2 \leq \| u(0) \|^2 \, e^{-\delta t} + C\delta^{=1} \tag{11}$$

Остання нерівність означає дисипативність м-напівпотоку G, отже для доведення теореми згідно [4] достатньо перевірити наступну властивість: якщо для послідовності

$\{u_n\} \subset W$, $u_n(0) \to u_0$ слабо в H, то існує $u \in W$, $u(0) = u_0$ таке, що по підпослідовності

$$\forall t \geq 0 \;\; u_n(t) \to u(t) \text{ в } H \tag{12}$$

Дійсно, з оцінки (10) маємо, що для довільного $T > 0$ послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0,T;L^4(\Omega))$, а послідовність $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\}$ в силу рівняння (1) і теорем вкладення Соболєва обмежена в

$$L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\Omega)) \subset$$
$$\subset L^{4/3}(0,T;H^{-s}(\Omega)), \; s = \max\{1, n/4\}.$$

Отже з леми про компактність [2] існує функція $u = u(t,x)$ така, що по підпослідовності

$u_n \to u$ в $L^2(0,T;H)$ і м. с. в $(0,T) \times \Omega$,

слабо в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0,T;L^4(\Omega))$, (13)

$u_n(t) \to u(t)$ слабо в H $\forall t \in [0,T]$ і сильно м.с.

Збіжності (13) одразу дозволяють перейти до границі в перших трьох доданках рівності (3). Щодо четвертого доданку, то

$$f(x, u_n(t,x)) \to f(x, u(t,x)) \text{ м.с.},$$

$$| f(x, u_n(t,x)) | \leq C_1(x) + C_2(x) | u_n(t,x) |,$$

і оскільки $u_n \to u$ в $L^2((0,T) \times \Omega)$, то $f(x, u_n) \to f(x,u)$ в $L^1((0,T) \times \Omega)$. Отже, функція $u \in W$, $u(0) = u_0$. Зокрема $u \in C([0,+\infty); L^2(\Omega))$. Розглянемо функції

$$J_n(t) = \| u_n(t) \|^2 - Ct, \quad J(t) = \| u(t) \|^2 - Ct.$$

З нерівності (10) маємо, що функції J_n, J є неперервними, монотонно не зростаючими і в силу (13) J_n збігається до J майже скрізь. Тоді

$$\forall t \geq 0 \quad J_n(t) \to J(t). \tag{14}$$

Тоді $\forall t \geq 0$

$$J(t) = \liminf J_n(t) \geq \liminf \| u_n(t) \|^2 - Ct,$$

отже

$$\liminf \| u_n(t) \| \leq \| u(t) \|.$$

Проте в силу слабкої збіжності (13) справедлива обернена нерівність. Таким чином

$$u_n(t) \to u(t) \;\; \forall t \geq 0$$

і теорема доведена.

Висновки

В роботі доведено існування інваріантного, стійкого глобального атрактору для многозначного напівпотоку, породженого розв'язками рівняння Чаффе-Інфанте з нелокальною нелінійністю.

Список використаних джерел

1. *Temam R.*. «Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics» N.Y.: Springer, 1988.
2. *Бабин А.*В., *Вишик М.И.* «Аттракторы эволюционных уравнений» – М.: Наука, 1987.
3. *Мельник В.С.* «Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем». Киев, препринт Института кибернетики НАНУ № 94-17, 1994.
4. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* «Global attractors of multivalued dynamical systems and systems and evolution equations without uniqueness». – Kyiv: Naukova Dumka, 2008.
5. *Zhu C., Mu C.* Attractor for the nonlinear Schredinger equation with a nonlocal nonlinear trem // J. Dynamical and Control Systems, 2010. – vol.16. – P.585-603.

Надійшла до рекколегії 20.10.2012