УДК 512.53

Євгенія Кочубінська[1], к. ф.-м. н., асистент

Підстановкові зображення узагальнених біциклічних напівгруп

Описано будову замкнених інверсних піднапівгруп узагальнених біциклічних напівгруп та побудовано підстановкові зображення цих напівгруп. Встановлено умову еквівалентності двох зображень.

Ключові слова: узагальнена біциклічна напівгрупа, замкнена інверсна піднапівгрупа, праві ω-класи, підстановкове зображення.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Eugenia Kochubinska[1], Ph.D., Assistant Prof.

Permutational representation of generalized bicyclic semigroups

The structure of closed inverse subsemigroups of generalized bicyclic semigroups is described and permutational representation of these semigroups is constructed. The equivalence condition for two representation is given.

Keywords: generalized bicyclic semigroup, closed inverse subsemigroup, right ω-classes, permutational representation.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Нехай T — кореневе n-регулярне дерево з коренем x_0, $\operatorname{Aut} T$ — його група автоморфізмів. Якщо важливо, що саме вершина x є коренем дерева T, то писатимемо T_x. Зафіксуємо вершину першого рівня x_1^1 і розглянемо деякий частковий автоморфізм: $a\colon T_{x_0} \to T_{x_1^1}$ дерева T_{x_0} на кореневе піддерево $T_{x_1^1}$. Для кожної вершини y першого рівня зафіксуємо частковий автоморфізм $a_y\colon T_{x_0} \to T_y$ дерева T_{x_0} на кореневе піддерево T_y. Якщо $x \neq y$, то $\operatorname{ran}(a_x) \cap \operatorname{dom}(a_y^{-1}) = \varnothing$, тому $a_x a_y^{-1} = \mathbf{0}$ (порожнє відображення), якщо ж $x = y$, то $a_x a_x^{-1} = \mathbf{1} = \mathrm{id}_T$.

Інверсну піднапівгрупу напівгрупи $\operatorname{PAut} T$, породжену відображенням a та групою $\operatorname{Aut} T$, позначимо $B^{(n)}$, а інверсну піднапівгрупу, породжену множиною $\{a_y\colon y \in V_1\}$, позначимо $B^{[n]}$. Для довільного ненульового $x \in B^{(n)}$ ($B^{[n]}$) область визначення $\operatorname{dom}(x)$ та образ $\operatorname{ran}(x)$ є кореневими піддеревами дерева T_{x_0}. Позначатимемо через $\operatorname{root}(x)$ корінь області визначення елемента x.

Легко бачити, що $B^{(1)} = B^{[1]} = B$ — відома біциклічна напівгрупа [2, §1.12, т.1], тому напівгрупи $B^{(n)}$ і $B^{[n]}$ природно називати узагальненими біциклічними напівгрупами. Властивості напівгрупи $B^{(n)}$ наведено в [3].

2 Замкнені інверсні піднапівгрупи узагальненої біциклічної напівгрупи

На інверсній напівгрупі S можна ввести відношення природного часткового порядку ω : $a\,\omega\, b \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1}, a^{-1}a = a^{-1}b$. Зауважимо, що з $a\,\omega\, b$ випливає рівність $a\big|_{\operatorname{dom}}(a) = b\big|_{\operatorname{dom}}(a)$. На множині ідемпотентів відношення порядку ω набуває вигляду: $e\,\omega\, f \Leftrightarrow ef = fe = e$. Ідемпо- тент $e \in E(S)$ називається *примітивним*, якщо $e \neq 0$ і для кожного ненульового ідемпотента $f \in E(S)$ з $f\,\omega\, e$ випливає, що $f = e$, тобто примітивний ідемпотент — це мінімальний ненульовий ідемпотент. *Замиканням* $H\omega$ множини $H \subset S$ називається множина $H\omega = \{h \in S \mid \exists \pi \in H\ \pi\,\omega\, h\}$. Якщо $H\omega = H$, то множина H називається *замкненою*.

Твердження 1. [2, Лема 7.9, т.2] *Нехай H — інверсна піднапівгрупа інверсної напівгрупи S. Тоді $H\omega$ є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи S.*

Нехай K — замкнена інверсна піднапівгрупа напівгрупи $B^{(n)}$. Якщо існують $e, f \in E(K)$, такі, що $ef = \mathbf{0}$, то $K = B^{(n)}$, бо для довільного елемента $s \in B^{(n)}$ вірно, що $\mathbf{0}\,\omega\, s$. Нехай надалі $K \neq B^{(n)}$. Нерівність $ef \neq \mathbf{0}$ виконується лише тоді, коли $\operatorname{dom}(e) \cap \operatorname{dom}(f) \neq \varnothing$, що можливе лише у випадку, коли або $\operatorname{dom}(e) \subseteq \operatorname{dom}(f)$, або $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(e)$. Тому якщо $e < f$, то вершина $\mathrm{root}(e)$ лежить нижче за вершину $\mathrm{root}(f)$. Тоді множина $P = \{\mathrm{root}(e) \,|\, e \in E(K)\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$, де $x_i < x_j$, якщо $i < j$, є лінійно впорядкованою, отже, завдяки замкненості, є шляхом. Для кожного елемента $s \in K$ вершина $\mathrm{root}(s)$ належить шляху P. Більше того, елементи напівгрупи K переводять шлях P у себе у тому сенсі, що для кожного $b \in K$ виконується $\big(P \cap \mathrm{dom}(b)\big)^b \subseteq P$. Дійсно, для $x_i \in \mathrm{dom}(b)$ покладемо $c := be_{x_i}$, де $e_{x_i} \in E(B^{(n)})$, $\mathrm{root}(e_{x_i}) = x_i$, очевидно, $c(x_i) = b(x_i)$. Елемент $c^{-1}c$ є ідемпотентом K, а тоді $\mathrm{root}(c^{-1}c) = c(x_i) \in P$. Ми називатимемо шлях P *стрижнем* напівгрупи K.

Піднапівгрупа ідемпотентів $E(B^{(n)})$ узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)}$ нескінченна. Тому замкнена інверсна піднапівгрупа K напівгрупи $B^{(n)}$ може не містити найменшого ідемпотента. Через це, досліджуючи будову замкнених інверсних піднапівгруп напівгрупи $B^{(n)}$, будемо розглядати два випадки: а) K містить найменший ідемпотент; б) K не містить найменшого ідемпотента.

Нехай K містить найменший ідемпотент $e_{\min}$. Позначимо через $T_{\min}$ область визначення найменшого ідемпотента $e_{\min}$. У цьому випадку шлях P є скінченним. Нехай $\mathrm{root}(e_{\min}) = x_k$.

Лема 1. *Якщо замкнена інверсна піднапівгрупа K напівгрупи $B^{(n)}$ містить найменший ідемпотент $e_{\min}$, то вона зберігає рівень вершини $\mathrm{root}(x)$ для кожного елемента $x \in K$.*

Доведення. Припустимо, що для $b \in K$ $x_i \in P$ має місце $b(x_i) = x_l$, $i \neq l$. Будемо вважати, що $i < l$ (в іншому випадку потрібно розглянути інверсний до b елемент b^{-1}). Оскільки це відображення є частковим автоморфізмом, то $b(x_k) = x_{k+l-i}$ для $k > i$. Покладемо $c := b\, e_{\min}$. Тоді $c^{-1}c$ є ідемпотентом, причому $c^{-1}c < e_{\min}$. Оскільки $\mathrm{root}(c^{-1}c) = x_{k+l-i}$, тобто $\mathrm{root}(c^{-1}c)$ лежить нижче за $\mathrm{root}(e_{\min})$, то одержана нерівність є строгою. З отриманої суперечності випливає, що для $b \in K$ $\;b(x_i) = x_i$ для кожного $x_i \in P$. $\square$

При $i < k$ для вершини x_i, що належить стрижню P, визначимо піддерево $T^P_{x_i}$ з коренем у вершині x_i як піддерево дерева T з множиною вершин $VT^P_{x_i} = VT_{x_i} \setminus VT_{x_{i+1}}$.

Отже, валентність кореневої вершини дерева $T^P_{x_i}$ дорівнює $n-1$, а валентності інших вершин дорівнюють $n+1$. Через $\overline{T}^{(n)}$ позначатимемо кореневе дерево, валентність кореня якого дорівнює $n-1$, а валентності інших вершин дорівнюють $n+1$.

Оскільки замкнена інверсна піднапівгрупа K містить найменший ідемпотент, то $K = H\omega$, де $H < \mathrm{Aut}\, T_{\min}$ [1]. Опишемо будову замкненої інверсної піднапівгрупи K більш детально.

Нагадаємо, що через $\mathcal{N}_i$ позначено множину $\{1, 2, \ldots, i\}$. Позначимо $E_k = \{\mathbf{0}, e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, де $e_i = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Множина E_k є інверсною напівгрупою, кожний елемент якої є ідемпотентом.

Лема 2. *Напівгрупа $(\mathrm{Aut}\, T_{x_k})\omega$ ізоморфна $\big(\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\big) \times \mathrm{Aut}\, T$, де $\wr_p$ позначає частковий вінцевий добуток напівгруп.*

Доведення. Для будь-якої $x_i \in P$ має місце ізоморфізм $T^P_{x_i} \simeq \overline{T}^{(n)}$, тому $\mathrm{Aut}\, T^P_{x_i} \simeq \mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)}$. Для кожного $i \leqslant k-1$ розглянемо відображення $\Theta_i \colon T^P_{x_i} \to \overline{T}^{(n)}$, яке встановлює ізоморфізм між $T^P_{x_i}$ і $\overline{T}^{(n)}$, а для $i = k$ розглянемо ізоморфізм $\Theta_k \colon T_{x_k} \to T$.

Нехай $s \in \mathrm{Aut}(T_{x_k})\omega$, $\mathrm{root}(s) = x_j$, $j \leqslant k$. Покладемо $e_s = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-j}}$, якщо $j < k$, $e_s = \mathbf{0}$, якщо $\mathrm{root}(s) = x_k$.

Покладемо $h_s(x) = \Theta_k(s(\Theta_k^{-1}(x)))$. Для $i \leqslant k$ визначимо відображення $f_s(i) = \Theta_{k-i}^{-1} s \Theta_{k-i}$, яке діє з $\mathcal{N}_i$ в $\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)}$. За побудовою $\mathrm{dom}(f_s) = \mathrm{dom}(e_s)$.

Задамо відображення $\psi \colon (\mathrm{Aut}\, T_{x_k})\omega \to \big(\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\big) \times \mathrm{Aut}\, T$ таким чином: $\psi(s) = (f_s, e_s) \times h_s$.

Розглянемо елемент $e_{s_1 s_2}$. Нехай $\mathrm{root}(s_1) = x_{j_1}$, $\mathrm{root}(s_2) = x_{j_2}$. Тоді $\mathrm{root}(s_1 s_2) = x_{\max\{j_1, j_2\}}$, а, отже, $e_{s_1 s_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-\max\{j_1,j_2\}}}$.

Розглянемо добуток $e_{s_1} e_{s_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-j_1}} \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{k-j_2}} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{\min\{k-j_1, k-j_2\}}} = \mathrm{id}_{k-\max\{j_1,j_2\}}$. Отже, $e_{s_1 s_2} = e_{s_1} e_{s_2}$. Звідси маємо, що $e_{s_1 s_2} = e_{s_1} e_{s_2}$.

Для всіх $x \in \overline{T}^{(n)}$, $i \in \mathrm{dom}(e_{s_1} e_{s_2})$, оскільки $\Theta_{k-i}^{-1} s \Theta_{k-i} \in \mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)}$, виконується

$$
\begin{aligned}
& f_{s_1} f_{s_2}^{e_{s_1}}(i)(x) = f_{s_2}(i^{e_{s_1}})(f_{s_1}(i)(x)) = \\
& = f_{s_2}(i)(f_{s_1}(i)(x)) = f_{s_2}(\Theta_{k-i}(s_1(\Theta_{k-i}^{-1}(x)))) = \\
& = \Theta_{k-i}(s_2(\Theta^{-1}(\Theta_{k-i}(s_1(\Theta_{k-i}^{-1}(x)))))) = \\
& = \Theta_{k-i}(s_2(s_1(\Theta_{k-i}^{-1}(x)))) = \Theta_{k-i}(s_1 s_2(\Theta_{k-i}^{-1}(x))) = \\
& = f_{s_1 s_2}(i)(x).
\end{aligned}
$$

Аналогічно, $h_{s_1} h_{s_2}(x) = h_{s_2}(\Theta_k(s_1(\Theta_k^{-1}(x)))) =$
$= \Theta_k(s_2(\Theta_k^{-1}(\Theta_k(s_1(\Theta_k^{-1}(x)))))) =$

$= \Theta_k(s_2(s_1(\Theta_k^{-1}(x)))) =$
$= \Theta_k(s_1 s_2(\Theta_k^{-1}(x))) = h_{s_1 s_2}(x)$. Далі,

$$\psi(s_1 s_2) = (f_{s_1 s_2}, e_{s_1 s_2}) \times h_{s_1 s_2} =$$
$$= (f_{s_1} f_{s_2}^{e_{s_1}}, e_{s_1} e_{s_2}) \times h_{s_1} h_{s_2} =$$
$$= ((f_{s_1}, e_{s_1}) \times h_{s_1})((f_{s_2}, e_{s_2})) \times h_{s_2} = \psi(s_1)\psi(s_2).$$

Покажемо, що кожному елементу $(f, e) \times h \in (\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k) \times \operatorname{Aut} T$ можна поставити у відповідність елемент $\tau \in (\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega$. Визначимо елемент $\tau \in B^{(n)}$ таким чином: для $x \in T^P_{x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $\tau(x) = \Theta_i^{-1}(f(k-i)(\Theta_i(x)))$, для $x \in T_{x_k}$ $\tau(x) = \Theta_k^{-1}(h(\Theta_k(x)))$.

Елемент τ визначається за елементом $(f, e) \times h$ єдиним чином. За побудовою $\tau\big|_{\operatorname{Aut} T_{x_k}} \in \operatorname{Aut} T_{x_k} \subset (\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega$. Ясно, що $\tau\big|_{T_{x_k}} \ \omega\ \tau$. Оскільки $(\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega$ — замкнена піднапівгрупа, то $\tau \in (\operatorname{Aut} T_{x_k}\omega)$.

Таким чином, між елементами напівгрупи $\left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times \operatorname{Aut} T$ і елементами напівгрупи $\operatorname{Aut} T_{x_k}\omega$ встановлюється взаємно однозначна відповідність. Оскільки відображення $\psi\colon (\operatorname{Aut} T_{x_k})\,\omega \to \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times \operatorname{Aut} T$ зберігає операцію, то ψ є ізоморфізмом. □

Теорема 1. *Кожна замкнена інверсна піднапівгрупа K узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)}$, множина $E(K)$ ідемпотентів якої містить найменший ідемпотент, корінь області визначення якого належить k-му рівню, ізоморфна напівгрупі $\left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$, де $H < \operatorname{Aut} T$.*

Напівгрупа $\left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$, де H — підгрупа групи $\operatorname{Aut} T$, ізоморфна замкненій інверсній піднапівгрупі напівгрупи $B^{(n)}$, яка містить найменший ідемпотент e, такий, що $\operatorname{root}(e) = x_k$.

Доведення. Нехай K — замкнена інверсна піднапівгрупа напівгрупи $B^{(n)}$, множина $E(K)$ ідемпотентів якої містить найменший ідемпотент $e_{\min}$ з областю визначення $T_{\min} = T_{x_k}$. Тоді (див. [1, Теорема 3.1]) $K = H_0\,\omega$, де $H_0 < \operatorname{Aut} T_{x_k}$.

Розглянемо ізоморфізм $\psi\colon (\operatorname{Aut} T_{x_k})\omega \to (\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k) \times \operatorname{Aut} T$, який побудовано у лемі 2. Ізоморфізм ψ зберігає природний порядок ω, тому $\psi(K) = \psi(H_0)\omega$, звуження $\psi\big|_K$ встановлює ізоморфізм між K та $\psi(K)$.

Згідно визначення ізоморфізму ψ маємо:

$$\begin{aligned}\psi(H_0) =&\{\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times \Theta_k^{-1} h \Theta_k, h \in H_0\} =\\ =&\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times (\Theta_k^{-1} H_0 \Theta_k).\end{aligned}$$

Очевидно, $\Theta_k^{-1} H_0 \Theta_k$ є підгрупою групи $\operatorname{Aut} T$. Позначимо її H. Тоді $\psi(H_0)\omega = (\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega$.

Покажемо, що $(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega = \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$.

Нехай $(f, a) \times h_1 \in (\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega$. Це означає, що існує такий елемент $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h \in \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H$, що $((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)\,\omega\,((f, a) \times h_1)$. За означенням порядку ω маємо:

$$((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h^{-1}) = ((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((f, a)^{-1} \times h_1^{-1}),$$

$$(\mathbf{0},\mathbf{0}) \times hh^{-1} = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \times hh_1^{-1}.$$

Звідси $h = h_1$. Отже, $h_1 \in H$, а тому $(f, a) \times h_1 \in \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$. Отже, $(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega \subset \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$.

Покажемо тепер включення

$$(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega \supset \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H.$$

Нехай $(f, a) \times h \in \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$. Розглянемо добутки:

$$((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)^{-1} =$$
$$= ((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h^{-1}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \times hh^{-1},$$
$$((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((f, a) \times h)^{-1} =$$
$$= ((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)((f, a)^{-1} \times h^{-1}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \times hh^{-1}.$$

Отже, для довільного $(f, a) \times h \in \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$ вірно, що $((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times h)\ \omega\ ((f, a) \times h)$. Отже, $(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega \supset \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$.

З цих двох включень випливає рівність

$$(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\,\omega = \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H.$$

Доведемо другу частину твердження.

Розглянемо ізоморфізм

$$\psi^{-1}\colon \left(\operatorname{Aut} \overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times \operatorname{Aut} T \to (\operatorname{Aut} T_{x_k})\ \omega\ .$$

Нехай $H < \operatorname{Aut} T$ і $\psi^{-1}(\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H) = H_0$. Завдяки тому, що ψ — ізоморфізм, H_0 є підгрупою групи $\operatorname{Aut} T$. Оскільки ізоморфізм зберігає порядок ω, то $\psi^{-1}((\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\} \times H)\omega) = H_0\,\omega$. Напівгрупа $H_0\omega$ є замкненою інверсною піднапівгрупою в $B^{(n)}$ [2, Лема 7.9, т.2]. Отже,

$\left(\operatorname{Aut}\overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$ ізоморфна деякій замкненій інверсній піднапівгрупі напівгрупи $B^{(n)}$.

Знайдемо тепер область визначення найменшого ідемпотента замкеної інверсної піднапівгрупи K напівгрупи $B^{(n)}$. Якщо $(f,a) \times h$ є ідемпотентом, то $h = \mathrm{id}_T$, тому найменшим ідемпотентом в $\left(\operatorname{Aut}\overline{T}^{(n)} \wr_p E_k\right) \times H$ є $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \times \mathrm{id}_T$. Тоді $\psi^{-1}((\mathbf{0},\mathbf{0}) \times \mathrm{id}_T) = \mathrm{id}_{T_{x_k}}$ є найменшим ідемпотентом в $H_0\omega$. Отже, областю визначення найменшого ідемпотента K є T_{x_k}. □

3 Підстановкові зображення узагальнених біциклічних напівгруп

Твердження 2. *Правими ω-класами за замкненою інверсною піднапівгрупою $K = H\omega$, $H < \operatorname{Aut} T_{x_k}$, є множини $(Hs)\omega$, $s \in D_K$, де $D_K = \{s \in S \,|\, ss^{-1} \in K\}$, причому $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$ тоді і лише тоді, коли $s_2\big|_{T_{x_k}} = \gamma s_1\big|_{T_{x_k}}$, де $\gamma \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$.*

Доведення. Оскільки $K = H\omega$, то для кожного елемента $l \in K$

$l\big|_{T_{x_k}} = h \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$. Тоді $l\big|_{T_{x_k}} s = hs$, $s \in D_K$, отже, $(ls)\big|_{T_{x_k}} = (hs)\big|_{T_{x_k}}$ і $(hs)\ \omega\ (ls)$. Таким чином, $(Ks)\omega \subset (Hs)\omega$. Позаяк справедливо, що $(Hs)\omega \subset (Ks)\omega$, то $(Hs)\omega = (Ks)\omega$.

Нехай $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$, тоді $s_2 \in (Hs_1)\omega$, тобто існує такий елемент $h \in Hs_1$, що $h\ \omega\ s_2$. З цього випливає, що існує автоморфізм $\gamma \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$ такий, що $(\gamma s_1)\big|_{T_{x_k}} = s_2\big|_{T_{x_k}}$, або $\gamma s_1\big|_{T_{x_k}} = s_2\big|_{T_{x_k}}$.

Нехай $s_1, s_2 \in B^{(n)}$ і нехай існує такий $\gamma \in \operatorname{Aut} T_{x_k}$, що $s_2\big|_{T_{x_k}} = \gamma s_1\big|_{T_{x_k}}$. Тоді $\gamma s_1 \in (Hs_1)$. Оскільки $(\gamma s_1)\big|_{T_{x_k}}\ \omega\ (\gamma s_1)$, то $\gamma s_1 \in (Hs_1)\omega$. З рівності $s_2\big|_{T_{x_k}} = \gamma s_1\big|_{T_{x_k}}$ маємо, що $(\gamma s_1)\ \omega\ s_2$, отже, $s_2 \in (Hs_1)\omega$ і $(Hs_2)\omega \subset (Hs_1)\omega$. З іншого боку, $s_1\big|_{T_{x_k}} = \gamma^{-1} s_2\big|_{T_{x_k}}$. Аналогічно, $(Hs_1)\omega \subset (Hs_2)\omega$, тому $(Hs_1)\omega = (Hs_2)\omega$. □

Теорема 2. *Нехай $K_1 = H_1\omega$, $K_2 = H_2\omega$ — замкнені інверсні піднапівгрупи узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)}$, де $H_i < \operatorname{Aut} T_{x_{k_i}}$, $i = 1,2$. Два зображення φ_{K_1} та φ_{K_2} напівгрупи $B^{(n)}$ на множині правих ω-класів за замкненими інверсними піднапівгрупами K_1 та K_2 еквівалентні тоді і лише тоді, коли H_1 і H_2 подібні, тобто коли існують ізоморфізми $\psi\colon H_1 \to H_2$ та $\Theta\colon T_{x_{k_1}} \to T_{x_{k_2}}$, такі, що $(\Theta(v))^{\psi(h)} = \Theta(v^h)$, для довільних $h \in H_1$, $v \in VT_{x_{k_1}}$.*

Доведення. Нехай φ_{K_1} та φ_{K_2} — еквівалентні зображення. Тоді піднапівгрупи K_1 і K_2 спряжені, тобто існує такий елемент $b \in B^{(n)}$, що $bb^{-1} \in K_1$, $b^{-1}b \in K_2$, $b^{-1}K_1 b \subseteq K_2$, $bK_2b^{-1} \subseteq K_1$. Нехай $T_{x_{k_i}}$ — область визначення найменшого ідемпотента e_i напівгрупи K_i. Надалі для спрощення позначимо $T_i := T_{x_{k_i}}$. Очевидно, що $K_i \subseteq S_i = \{\sigma \in B^{(n)} \,|\, T_i^\sigma = T_i\}$, $i = 1,2$. Тому $\operatorname{dom}(bb^{-1}) \supset T_1$, $\operatorname{dom}(b^{-1}b) \supset T_2$.

Нехай $\operatorname{dom}(b) = \Gamma_1$, а $\operatorname{dom}(b^{-1}) = \Gamma_2$. Очевидно, що $T_2^{b^{-1}} \subseteq \Gamma_1$. Припустимо, що $T_2^{b^{-1}} \neq T_1$. Тоді існує така вершина $v \in T_2$, що $b^{-1}(v) \in \Gamma_1 \setminus T_1$. Тоді $b^{-1}(v) \notin T_1$, тому $v \notin \operatorname{dom}(u)$, де $u = b^{-1}e_1 b \in b^{-1}K_1 b \subseteq K_2$, що неможливо. Звідси маємо, що $T_2^{b^{-1}} = T_1$, а тому і $T_1^b = T_2$.

Розглянемо елемент $s = e_1 b \in B^{(n)}$. Тоді $\operatorname{dom}(s) = T_1$ і $T_1^s = T_2$, $K_1 \ni ss^{-1} = e_1$, $K_2 \ni s^{-1}s = e_2$. Оскільки напівгрупи K_1 і K_2 спряжені, то отримаємо наступні включення:

$$s^{-1}K_1 s \;=\; b^{-1}(e_1K_1e_1)b \;\subseteq\; b^{-1}K_1 b \;\subseteq\; K_2$$

і, аналогічно, $sK_2s^{-1} \subseteq K_1$. З цих включень випливає, що

$$s^{-1}(e_1K_1)s \;\subseteq\; s^{-1}K_1 s \;\subseteq\; K_2.$$

Розглянемо деякий елемент $\tau \in s^{-1}(e_1K_1)s$. Для цього елемента, з одного боку, вірно, що $\operatorname{dom}(\tau) \subseteq \operatorname{dom}(s^{-1}) = T_2$, а з іншого, що $T_2 \subseteq \operatorname{dom}(\tau)$, бо $\tau \in K_2$. Отже, $\operatorname{dom}(\tau) = T_2$ і $e_2K_2 = \{\tau \in K_2 \mid \operatorname{dom}(\tau) = T_2\}$. Звідси випливає, що $s^{-1}(e_1K_1)s \subseteq e_2K_2$. Звузивши на T_2, отримаємо $s^{-1}H_1 s \subseteq H_2$, бо $K_i\big|_{T_i} = H_i$, $i = 1,2$. Розглянувши включення $s(e_2K_2)s^{-1} \subseteq K_1$, аналогічним чином отримаємо $sH_2s^{-1} \subseteq H_1$. Таким чином, $H_2 = s^{-1}H_1 s$.

Побудуємо ізоморфізм $\psi\colon H_1 \to H_2$ наступним чином $\psi(h) = s^{-1}hs$, $h \in H_1$, $\psi(h) \in H_2$. Елемент $s \in B^{(n)}$ задає взаємно однозначну відповідність $\Theta\colon T_1 \to T_2$, $v \mapsto v^s$ (так що $x_{k_1}^s = x_{k_2}$), між множинами вершин дерев T_1 і T_2. Для довільних $h \in H_1$, $v \in VT_1$ справедливо

$$(\Theta(v))^{\psi(h)} = (\Theta(v))^{s^{-1}hs} = v^{ss^{-1}hs} = v^{hs} = \Theta(v^h).$$

Отже, ізоморфізми ψ і Θ узгоджені.

Нехай існують ізоморфізми $\psi\colon H_1 \to H_2$ і $\Theta\colon T_1 \to T_2$, такі, що $(\Theta(v))^{\psi(\gamma)} = \Theta(v^\gamma)$, $v \in VT_1, \gamma \in H_1$.

Розглянемо елемент $\alpha \in \Theta^{-1}K_1\Theta$. Нехай $\alpha = \Theta^{-1}h\Theta$, $h \in K_1$. Тоді $(T_2)^\alpha = (T_2)^{\Theta^{-1}h\Theta} = T_2$. Тоді для $v \in T_2$ маємо $v^\alpha = v^{\Theta^{-1}h\Theta} = v^{\psi(h)}$. Оскільки $\psi(h) \in K_2$, то $\alpha \in K_2$. Отже, $\Theta^{-1}K_1\Theta \subseteq K_2$. Цілком аналогічно доводиться, що $\Theta K_2\Theta^{-1} \subseteq K_1$. Таким чином, напівгрупи K_1 і K_2 спряжені, причому $\Theta\Theta^{-1} = \mathrm{id}_{T_1} \in H_1 \subset K_1$, $\Theta^{-1}\Theta = \mathrm{id}_{T_2} \in H_2 \subset K_2$. Отже, зображення φ_{K_1} і φ_{K_2} еквівалентні. □

Розглянемо тепер випадок, коли замкнена інверсна піднапівгрупа K узагальненої біциклічної напівгрупи $B^{(n)} = \langle a, \mathrm{Aut}\, T\rangle$ не містить найменшого ідемпотента. Можна вважати, що зсув a відбувається вздовж шляху P. Розглянемо множину $D = \{t - s \,|\, \sigma a^{-s}a^t\tau \in K\}$. Покажемо, що ця множина є підгрупою групи $\mathbb{Z}$. Нехай $\sigma_1 a^{-s_1}a^{t_1}\tau_1, \sigma_2 a^{-s_2}a^{t_2}\tau_2 \in K$ і $\sigma_1 a^{-s_1}a^{t_1}\tau_1 \cdot \sigma_2 a^{-s_2}a^{t_2}\tau_2 = \sigma a^{-s}a^t\tau$. Оскільки $t_1 - s_1 + t_2 - s_2 = t - s$, то множина D є замкненою відносно додавання. З інверсності піднапівгрупи K випливає, що коли $\sigma a^{-s}a^t\tau \in K$, то $\tau^{-1}a^{-t}a^s\sigma^{-1} \in K$, тобто, якщо $t - s \in D$, то й $s - t \in D$, таким чином, множина D замкнена відносно взяття оберненого. Отже, множина D є підгрупою групи $\mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $D = d\mathbb{Z}$ для деякого $d \in \mathbb{Z}$. У випадку, коли $D = d\mathbb{Z}$, будемо казати, що K є замкненою інверсною піднапівгрупою типу d.

Розглянемо випадок $d = 0$, тобто коли піднапівгрупа K зберігає рівень вершин шляху $P = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Позначимо через K_i множину таких елементів напівгрупи K, область визначення яких містить дерево T_{x_i}. Тоді K_i є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$. Очевидно, що $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots$ Отже, замкнена інверсна піднапівгрупа K має вигляд $K = \bigcup_i K_i$.

З а у в а ж е н н я. Піднапівгрупа K_i ізоморфна $\left(\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)} \wr_p E_i\right) \times H_i$, де $H_i < \mathrm{Aut}\, T_{x_i}$. Оскільки ми розглядаємо випадок, коли піднапівгрупа K зберігає рівень вершин, то кожна підгрупа H_i лишає нерухомим частину шляху P, який починається у вершині x_i. Замкнену інверсну піднапівгрупу K можемо розглядати, як напівгрупу, яка ізоморфна $\varinjlim\left((\mathrm{Aut}\, \overline{T}^{(n)} \wr_p E_i) \times H_i\right)$.

Такі елементи напівгрупи $\psi \in B^{(n)}$, що $\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)}$ є тотожним, утворюють піднапівгрупу напівгрупи $B^{(n)}$. Позначимо цю піднапівгрупу Ψ_P. Вона є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$. Покажемо, що з того, що $\psi \in \Psi_P$, випливає, що $\psi^{-1} \in \Psi_P$. З визначення напівгрупи Ψ_P маємо, що $\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} = \mathrm{id}_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)}$. Оскільки напівгрупа $B^{(n)}$ є інверсною, то $\mathrm{dom}(\psi^{-1}) = \mathrm{ran}(\psi)$. Тому $\mathrm{dom}(\psi^{-1}) \cap P = \mathrm{ran}(\psi) \cap P = \mathrm{dom}(\psi) \cap P$. Розглянемо рівність $\psi\psi^{-1}\psi = \psi$. Обмежимо обидві її частини на $P \cap \mathrm{dom}(\psi)$. Отримаємо:

$$\psi\psi^{-1}\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} = \psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)};$$

$$\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} \cdot \psi^{-1}\big|_{(P\cap\mathrm{dom}(\psi))^\psi} \cdot \psi\big|_{(P\cap\mathrm{dom}(\psi))^{\psi\psi^{-1}}} = \psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)}.$$

Врахувавши, що $\psi\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi)} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\psi)}$, $\psi\psi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\psi)}$ та $\mathrm{dom}(\psi^{-1}) \cap P = \mathrm{dom}(\psi) \cap P$, отримаємо $\psi^{-1}\big|_{P\cap\mathrm{dom}(\psi^{-1})} = \mathrm{id}_{P\cap\mathrm{dom}\,(\psi^{-1})}$. Отже, Ψ_P є інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$, а також є замкненою. За сказаним вище, кожна замкнена інверсна піднапівгрупа типу 0 зі стрижнем P міститься в Ψ_P.

Нехай E_P — множина тих ідемпотентів з $E(B^{(n)})$, що для $e \in E_P$ виконується: $\mathrm{root}(e) \in P$. Ця напівгрупа, очевидно, є інверсною. Визначимо піднапівгрупу $\Phi_P = E_P\omega$. Піднапівгрупа Φ_P є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи $B^{(n)}$. Кожна нетривіальна замкнена інверсна напівгрупа зі стрижнем P містить Φ_P. Справді, за визначенням P, $E_P = E(K) \subset E(K)\omega \subset K\omega = K$.

Підсумовуючи, маємо таке твердження:

Твердження 3. *Кожна нетривіальна замкнена інверсна піднапівгрупа типу* 0 *зі стрижнем* P*, яка не має найменшого ідемпотента, міститься в* Ψ_P *і містить* Φ_P*.*

Список використаних джерел

1. *Волошина Т.В.* Зображення інверсних напівгруп частковими підстановками: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Київ. нац. ун-т ім. Т.Шевченка. – К., 2002. – 19 с.

2. *Клиффорд А.*Алгебраическая теория полугрупп: [в двух томах]/Клиффорд А., Престон Г. М.:Наука, 1972. – 283 с., 422 с.

3. *Кочубінська Є.А.* Про одне узагальнення біциклічної напівгрупи/ Кочубінська Є.А. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки – 2004 – №. 34 – P. 24-30.

Надійшла до редколегії 27.10.2012