

УДК 532.5

Голіченко О.Л.,¹ аспірант,
Малюга В.С.,² к.ф.-м.н.

Рух рідини в скінченному, круговому циліндрі

В статті розглянутий рух однорідної, в'язкої, нестисливої рідини в середині скінченно-го кругового циліндра при малих числах Рейнольдса. Рух рідини в циліндрі відбувається за рахунок руху верхньої і нижньої границь циліндра. Для опису руху рідини використовується наближення Стокса. В статті розглянуті три випадки руху верхньої і нижньої границь циліндра, показані швидкості рідини в середині циліндра. Зроблена оцінка в'язких і нелінійних членів рівняння Нав'є-Стокса біля обода циліндра, наведені графіки перевірки виконання граничних умов.

Ключові слова: Скінченний циліндр, наближення Стокса, метод суперпозиції.

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

²Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова 8/4, e-mail: V_S_Malyuga@ukr.net

Статтю представив член редколегії професор, д.ф.-м.н. Маципура В.Т.

Постановка задачі

В даній статті розглядається гранична задача стаціонарного руху нестисливої, в'язкої рідини в кінцевому циліндрі з круговим перерізом при малих числах Рейнольдса (Рис. 1а). В циліндричних координатах циліндр з рідиною займає область $r \in [0,1]$, $z \in [-h,h]$. Вважається, що бічна поверхня циліндра $r = 1$ залишається нерухомою, в той час як торцеві поверхні $z = \pm h$ рухаються рівномірно і прямолінійно з постійною швидкістю. Для опису руху рідини використовується наближення Стокса. Рівняння руху рідини всередині циліндра задається системою рівнянь:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} = \nabla p, \quad \nabla \vec{u} = 0 \quad (1)$$

O. L. Golichenko,¹ PhD student,
V. S. Malyuga,² PhD (Phys.-Math)

Fluid flows in the finite circular cylinder

The paper considers flows of a homogeneous, viscous, incompressible fluid inside the finite circular cylinder at low Reynolds numbers. Flow of fluid in the cylinder is due to the movement of the upper and lower boundaries of the cylinder. To describe the fluid flow Stokes approximation is used. The paper deals with three cases of motion of the upper and lower boundaries of the cylinder, liquid velocity in the middle of the cylinder are shown. The estimation of nonlinear viscous and members of the equation Navier-Stokes equations near the rim of the cylinder are obtained, graphs of fulfillment of boundary conditions are shown.

Key words: Finite cylinder, Stokes approximation, method of superposition.

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: Golichenko_O_L@mail.ru

²Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabov st., 8/4, e-mail: V_S_Malyuga@ukr.net

де \vec{u} – векторне поле швидкості, p – скалярне поле тиску, μ – динамічна в'язкість. Граничні

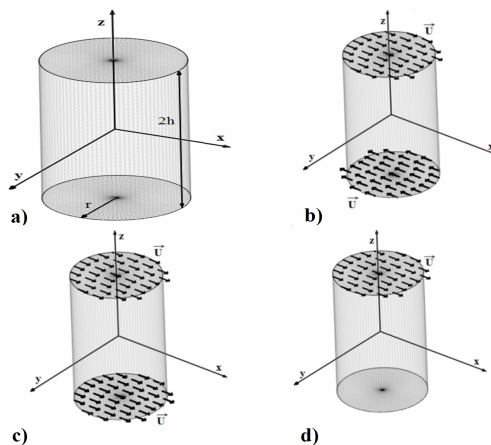


Рис. 1. Геометрія циліндричної області а), та граничні умови, що розглядаються б) - д).

умови мають вигляд (2):

$$\begin{cases} u_r(\theta, z) = 0 \\ u_\theta(\theta, z) = 0 \\ u_z(\theta, z) = 0 \end{cases} \quad r = 1 \quad \begin{cases} u_r(r, \theta) = u_r^\pm(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta) = u_\theta^\pm(r, \theta) \\ u_z(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad z = \pm h \quad (2)$$

Оцінка в'язких і нелінійних членів біля ободу циліндра

При такій постановці задачі допускається розрив швидкості на верхньому і нижньому ободах циліндра $r = 1 \cap z = \pm h$. Тому окремо було розглянуте питання допустимості наближення Стокса поблизу обода. Для оцінки внеску нелінійних і в'язких членів рівняння Нав'є-Стокса поблизу обода, введемо локальну циліндричну систему координат $r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}$ прив'язану до тригранника Френе $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ (Рис. 2), побудованого

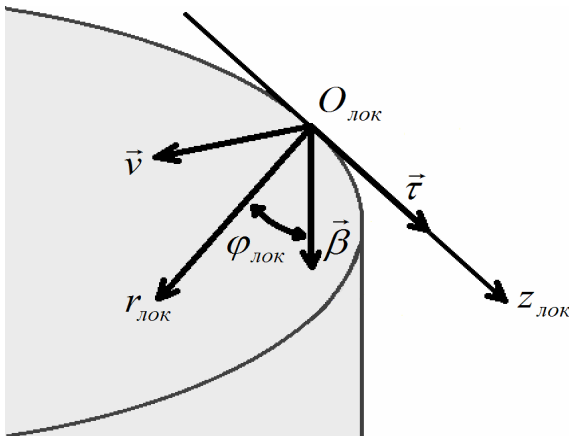


Рис. 2. Локальна система координат $r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}$ на ободі циліндра.

на ободі циліндра, з центром в точці біля якої ми оцінюємо в'язкі і нелінійні члени. Розташуємо локальну систему координат таким чином, щоб координата $z_{лок}$ лежала вздовж обода циліндра. При цьому розрив швидкостей буде лежати в площині $O_{лок} r_{лок} \varphi_{лок}$. Завдяки лінійності рівнянь Стокса (1) компоненти швидкості рідини в циліндрі можна розкласти на складові. Розкладемо швидкості в ряд по $r_{лок}$ поблизу точки, що досліджується.

$$U_i(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} r_{лок}^\lambda u_{\lambda i}(\varphi_{лок}, z_{лок}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} U_{\lambda i}(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}).$$

Ми маємо право це робити,

оскільки швидкості мають розрив по $\varphi_{лок}$, а по $r_{лок}$ залишаються неперервними для кожного фіксованого $\varphi_{лок}$. Оскільки швидкості обмежені,

$$\text{то } \lambda \geq 0 \text{ і } U_i(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{ki}(r_{лок}, \varphi_{лок}, z_{лок}).$$

Для кожного члена розкладу виду $U(r, \varphi, z) = r^n u(\varphi, z)$ справедливі оцінки $U \cdot \text{grad} U = O(A^2 \cdot r^{2n-1} \cdot u^2)$, $\nu \cdot \Delta U = O(\nu \cdot A \cdot r^{n-2} \cdot u)$. Тобто відношення нелінійних членів рівняння Нав'є-Стокса до в'язких оцінюється виразом $\text{Re} = U \cdot \text{grad} U / \nu \cdot \Delta U = O(A \cdot u \cdot r^{n+1}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. А отже число Рейнольдса прямує до нуля при наближенні до ободу циліндра, і застосування наближення Стокса біля ободу є цілком правомірним. Аналогічні оцінки числа Рейнольда поблизу двовимірних і тривимірних кутів зустрічаються в роботах [1,2,3]

Метод розв'язку

Для чисельних розрахунків, був використаний загальних розв'язок задачі Стокса в кінцевому циліндрі, представлений в [4]. Цей розв'язок був отриманий за допомогою методу суперпозиції, а задоволення граничних умов зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів розв'язку. Ця система розв'язувалась методом покращеної редукції. Щоб застосувати метод покращеної редукції необхідно дослідити асимптотичну поведінку невідомих коефіцієнтів розв'язку. Дослідження асимптотичної поведінки було проведено за допомогою перетворення Мелліна. В роботах [5,6] техніка перетворень Мелліна використовувалась для дослідження асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів розв'язку бігармонічної задачі для прямокутника. В статті [7] ця техніка адаптована для дослідження асимптотичної поведінки невідомих коефіцієнтів задачі Стокса в скінченному круговому циліндрі. За допомогою асимптотичного розкладу для невідомих коефіцієнтів розв'язку, була покращена точність розрахунків поля швидкості поблизу границі. Покращення збіжності рядів в полі швидкості проводилось

окремо поблизу кутової кромки (перетину бічної поверхні та плоскої кришки) та поблизу осі циліндра. В першому випадку асимптотичні розклади для невідомих коефіцієнтів підставлялися в поля швидкості і ряди, що містили невідомі величини, перетворювалися в скінчені суми. В другому випадку, на основі теореми про лишки, ряди замінялися інтегралами, підрахунок яких не складав ніякої технічної проблеми.

Перевірка виконання граничних умов

При кожному розрахунку виконувалася чисельна перевірка виконання граничних умов на кожній з сторін циліндра і будувалися графіки відхилень чисельно розрахованих компонент швидкості на границі від їх точних значень. Приклад таких графіків наведений на Рис. 3. Графіки по-

будовані для першого випадку руху границь (опис кожного з розглянутих випадків наведено нижче). Відношення висоти до діаметру рівне $h = 2$. Швидкість кришки $U_{кр} = 1$. Розрахунки проводилися для різної кількості перших членів ряду n . Будувалися як двовимірні (Рис. 3а-с) так і тривимірні графіки (Рис. 3d). На графіках чітко видно коливання компонент швидкості біля границі. Такі коливання спостерігаються по кожному з розрізів. При збільшенні членів ряду зростає кількість коливань, проте зменшується амплітуда, а значить зростає точність. Навіть при 25 членах ряду похибка не перевищує десятих частин відсотка. При 100 членах, вона вже не перевищує соті відсотка. Аналогічна поведінка швидкості на границі спостерігалась і у інших випадках.

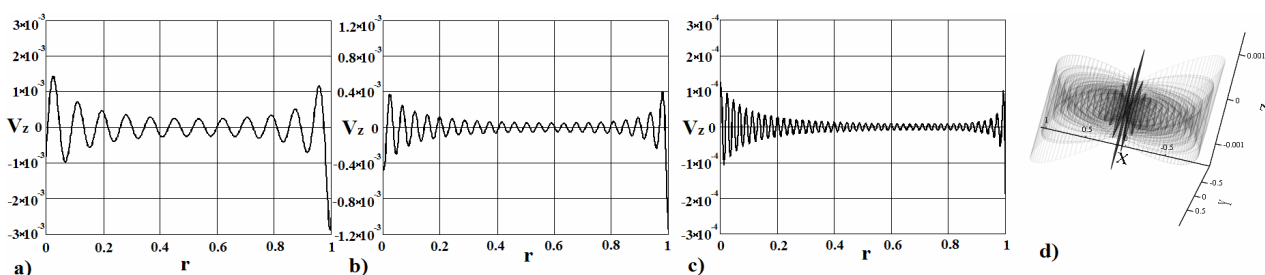


Рис. 3. Компонента швидкості U_z на нижній кришці циліндра, при різній кількості членів ряду а) $n=25$, б) $n=50$, в) $n=100$, д) $n=28$.

Результати розрахунків

В статті розглянуті три випадки руху верхньої і нижньої поверхонь циліндра. Для зручності швидкості задавалися в декартовій системі координат $Oxyz$. В першому випадку (Рис. 1б) верхня і нижня кришки циліндра рухаються вздовж осі Ox з однаковими за величиною але протилежними за напрямком швидкостями $(U_{кр}, 0, 0)$ та $(-U_{кр}, 0, 0)$. В другому випадку (Рис. 1с) верхня і нижня границі циліндра рухаються з однаковою швидкістю $(U_{кр}, 0, 0)$ в напрямку збільшення координати x . В третьому (Рис. 1д) випадку рухається лише верхня границя циліндра з постійною швидкістю $(-U_{кр}, 0, 0)$ в напрямку зростання x , а нижня границя залишається нерухомою. Оскільки поле швидкості, що

викликає течію рідини в скінченному циліндрі є стаціонарним, то воно цілком визначається траєкторіями частинок рідини. Завдяки тому, що в площині симетрії $y = 0$ компонента швидкості $V_\theta = 0$, то точки рідини, що в початковий момент часу знаходилися в цій площині, не залишають її і в наступні моменти часу. Через це спочатку розглянемо, що відбувається з рідиною саме в цій площині. Поле течії в площині симетрії $y = 0$ для першого, другого та третього випадку зображені на Рис. 4, 5 та 6 відповідно.

Чисельний аналіз швидкостей показує, що на відстані $l \geq 3r$ від рухомої кришки циліндра швидкість точок рідини має порядок $\leq O(10^{-3} \cdot U_{кр})$ і він швидко зменшується при збільшенні відстані до кришки циліндра. Тобто рух кришки циліндра має суттєвий вплив на рух рідини лише на глибину $\approx 3r$. Цей факт знайшов

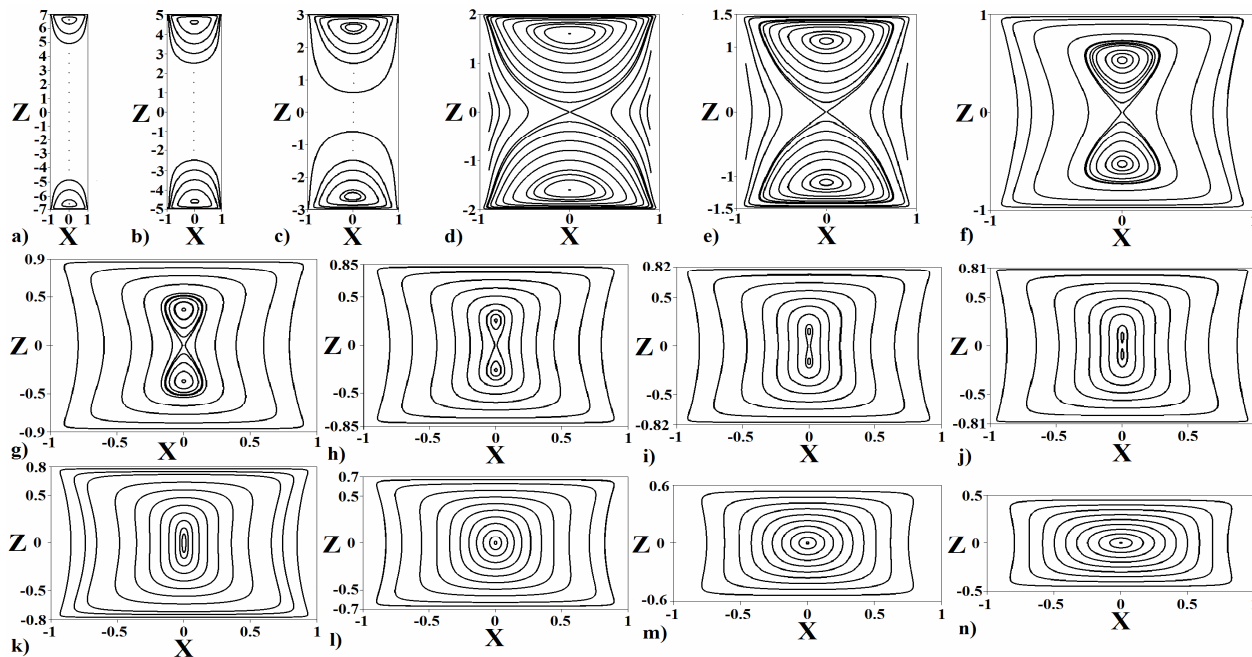


Рис. 4. Лінії току в площині симетрії $y = 0$. Випадок 1. а) $h=7$, б) $h=5$, в) $h=3$, д) $h=2$, е) $h=1.5$, ф) $h=1$, г) $h=0.9$, г) $h=0.85$, и) $h=0.82$, j) $h=0.81$, к) $h=0.8$, л) $h=0.7$, м) $h=0.6$, н) $h=0.5$.

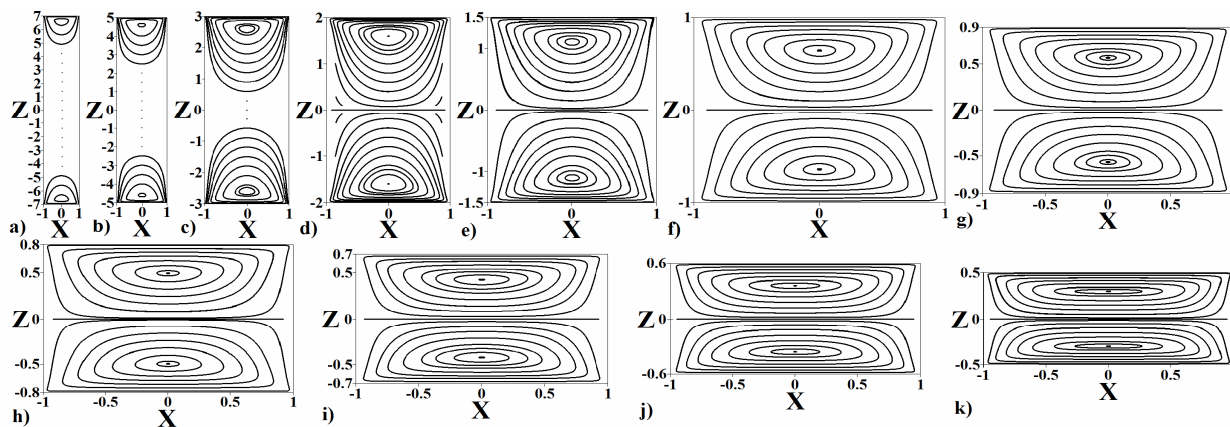


Рис. 5. Лінії току в площині симетрії $y = 0$. Випадок 2. а) $h=7$, б) $h=5$, в) $h=3$, д) $h=2$, е) $h=1.5$, ф) $h=1$, г) $h=0.9$, г) $h=0.8$, и) $h=0.7$, j) $h=0.6$, к) $h=0.5$.

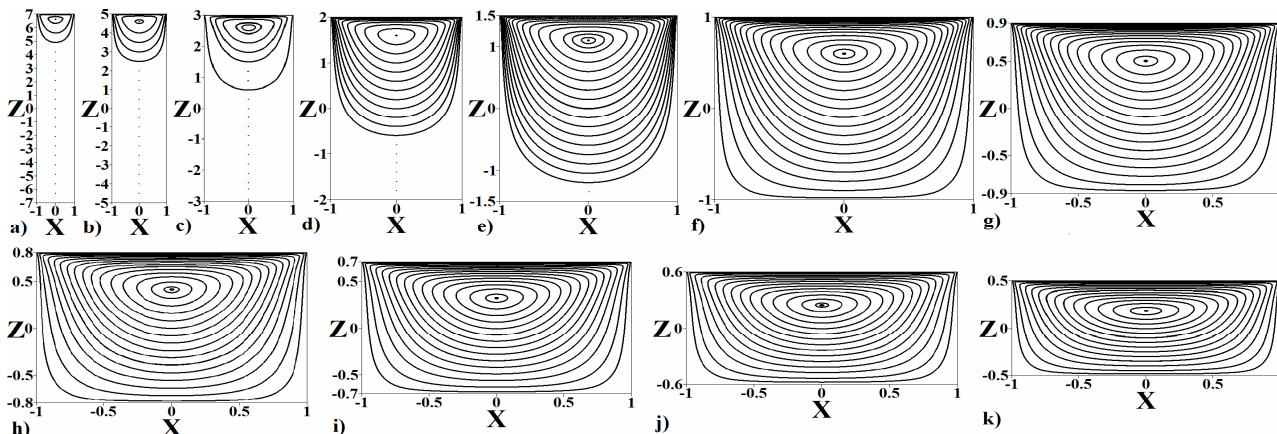


Рис. 6. Лінії току в площині симетрії $y = 0$. Випадок 3. а) $h=7$, б) $h=5$, в) $h=3$, д) $h=2$, е) $h=1.5$, ф) $h=1$, г) $h=0.9$, г) $h=0.8$, и) $h=0.7$, j) $h=0.6$, к) $h=0.5$.

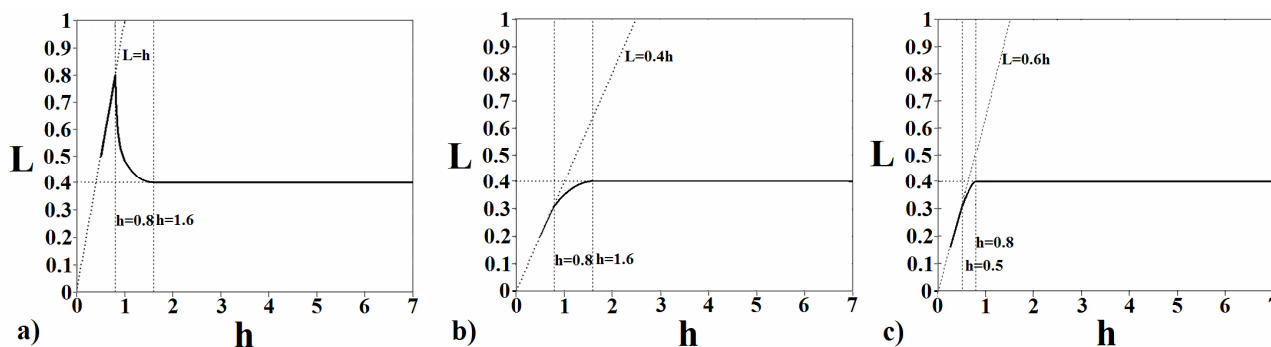


Рис. 7. Відстань особливої точки типу «центр» до кришки, рух якої створює цю особливу точку.

а) Випадок 1, б) Випадок 2, в) Випадок 3.

відображення на картині ліній течії у всіх трьох випадках руху для висот циліндра $h \geq 3$.

У всіх трьох випадках в залежності від висоти циліндра можна виділити три характерні режими руху рідини. Ці режими добре видно якщо поглянути на залежність відстані особливої точки типу «центр» навколо якої обертається рідина від кришки циліндра завдяки руху якої утворилася ця точка (Рис. 7).

Для першого, другого та третього випадку ці режими встановлюються відповідно: Перший режим - $h \in (0, 0.8)$, $h \in (0, 0.8)$, $h \in (0, 0.5)$. Другий режим - $h \in (0.8, 1.6)$, $h \in (0.8, 1.6)$, $h \in (0.5, 0.8)$. Третій режим - $h \in (1.6, \infty)$, $h \in (1.6, \infty)$, $h \in (0.8, \infty)$.

Перший режим характерний для малих висот циліндра і відрізняється для кожного розглянутого випадку.

Для першого випадку в середній площині утворюється одна особлива точка типу «центр», що розташована по центру і вся рідина обертається навколо цієї точки. Зміна висоти циліндра лише «зплющує» або «розправляє» ці лінії.

Для другого випадку картина буде іншою. Тут утворюються дві однакові, замкнені області, кожна зі своєю особливою точкою. Якщо рідина в початковий момент знаходиться всередині однієї з областей, то вона буде залишатися всередині цієї області впродовж всього руху. Особлива точка типу «центр» завжди знаходиться на відстані $0.4h$ від кришки циліндра. Вся рідина всередині кожної з областей обертається навколо особливої точки.

В третьому випадку існує лише одна особлива «центральна» точка, кора знаходиться на від-

стані $0.6h$ від рухомої границі циліндра. Тут так само вся рідина обертається навколо особливої точки і зміна висоти циліндра впливає лише на «сплюснутість» траєкторій точок.

Третій режим руху, що відбувається при великих висотах циліндра, подібний у всіх трьох розглянутих випадках. В цьому режимі рухомі кришки збуджують деякий об'єм рідини на «глибину» до $3r$. Цей об'єм рухається навколо особливої «центральної» точки, що знаходиться на постійній відстані $0.4r$ від кришки. Вся інша рідина, що не потрапляє в збурену область рухається дуже повільно. Зміна висоти циліндра в цьому режимі ніяк не відображається на характері руху рідини, впливаючи лише на об'єм незбуреної рідин.

Другий режим руху в кожному з розглянутих випадків є перехідним від першого до третього.

При цьому в першому випадку особлива центральна точка розділяється на 3 особливі точки дві типу «центр» і одну типу «сідло». При цьому площина симетрії розділяється на 3 області, в кожній з яких рідина не зміщується з рідиною з інших областей. В другому і третьому випадках характер руху рідини якісно не змінюється, лише особлива еліптична точка при збільшенні висоти починає зміщуватися до рухомої кришки, доки не займе положення на відстані $0.4r$.

Щоб зрозуміти рух рідини за межами площини симетрії $y = 0$ наведемо траєкторії ліній течії для третього випадку руху (Рис. 8).

На рисунку зображені лінії течії, що проходять в площинах $y = -0.75$, $y = -0.25$, $y = 0.5$ та $y = 0.99$. Видно, що траєкторії частинок рідини, що лежать в площинах паралельних площині

$y = 0$ подібні до траєкторій в площині симетрії. Проте вони вже не є плоскими, а мають невелике викривлення по координаті y зумовлене циліндричністю резервуара. Всі траєкторії залежать від висоти циліндра таким же чином як і траєкторії в площині $y = 0$. Для них також будуть справедливі 3 режими руху, але дещо будуть відрізнятися висоти циліндра при яких відбуватиметься перехід від одного режиму до іншого і відстані особливої «центральної» точки до кришки циліндра. В усіх інших випадках руху кришок циліндру і для всіх висот циліндра картина буде аналогічною.

Таким чином, для всіх розглянутих випадків руху границь циліндра рух рідини всередині буде подібний до двовимірного. Рідина не переміщується між площинами паралельними площині симетрії $y = 0$. Перпендикулярно площині симетрії утворюються особливі лінії. Вони лежать в площині $x = 0$ і близькі до прямих, проте мають невелике викривлення вздовж z . Особливі центральні лінії виникають завжди. Особлива сідлова лінія виникає лише в першому випадку для висот циліндра $h \geq 0.8r$.

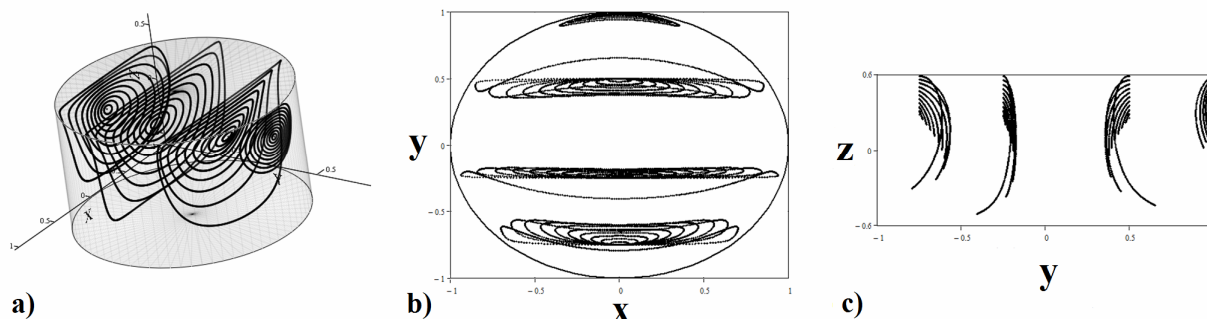


Рис. 8. Лінії течії всередині циліндру для третього випадку. $h=0.6$. а) тривимірне зображення ліній течії. б) проекція ліній течії на площину Oxy . в) проекція ліній течії на площину Oyz .

Список використаних джерел

1. Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics / G.K. Batchelor – Cambridge: Cambridge university press, 1967 – 1070.
2. Gomilko A.M. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner / A.M. Gomilko, V.S. Malyuga, V.V. Meleshko // J. Fluid Mech. – 2003 – 476 – pp. 159-177.
3. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner / H.K. Moffatt // J. Fluid Mech. – 1963 – 18 – pp. 1-18.
4. Meleshko V.V. Steady Stokes flow in a finite cylinder / V.V. Meleshko, V.S. Malyuga, A.M. Gomilko // Proc. R. Soc. Lond. A – 2000 – 456 – pp. 1741-1758.
5. Meleshko V.V. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko // Proc. R. Soc. Lond. A – 1997 – 453 – pp. 2139-2160.
6. Meleshko V.V. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko // Proc. R. Soc. Lond. A – 1997 – 460 – pp. 807-819.
7. Golichenko O.L. Asymptotic behavior of the coefficients of solution of the stationary Stokes flow problem in a finite cylinder / O.L. Golichenko, V.S. Malyuga, V.V. Meleshko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. Kyiv – 2012 – 1 – pp. 61-64. (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 22.03.13