УДК 517.954

М. І. Конаровська[1], аспірант

Загальна параболічна крайова задача без початкових даних для сингулярних рівнянь

Установлено коректність загальної крайової задачі без початкових даних для сингулярних параболічних рівнянь.

Ключові слова: крайова задача без початкових даних, оператори дробового інтегрування та диференціювання, функції типу ядер Пуассона.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2,
e-mail: mmi_marina@mail.ru

M. I. Konarovska[1], post-graduate student

General parabolic boundary problem without initial date for singular equations

Correctness of general boundary problem without initial date for singular parabolic equations is obtained.

Key words: boundary problem without initial date, operators of fractional integration and differentiation, the functions of Poisson type.

[1] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58012, Chernivtsi, Kotsubinsky str., 2,
e-mail: mmi_marina@mail.ru

Статтю представив докт. фіз.-мат. н., проф., акад. НАНУ Перестюк М.О.

У даній статті розглядається загальна крайова задача без початкових даних для сингулярних параболічних систем. Для цієї задачі одержано зображення розв'язку та встановлено умови існування. При побудові розв'язку вивчається дія оператора дробового диференціювання, встановлюється зв'язок між операторами дробового інтегрування та диференціювання, вводяться класи функцій, на яких визначені дані оператори. Слід зауважити, що для рівняння теплопровідності такі задачі розглянуті у праці А.М. Тихонова [5], для параболічних систем − у праці С.Д. Ейдельмана [2], для нелінійних параболічних рівнянь − у праці В.П. Лавренчука, М.І. Матійчука [6]. При побудові розв'язку використовується алгоритм, описаний у праці [1].

Постановка задачі, означення та допоміжні твердження

У шарі $\Pi^{+}_{-\infty} \equiv (-\infty;T)\times E^{+}_{n}$, $E^{+}_{n} = (0,+\infty)\times \times E_{n-2}\times(0,+\infty)$ розглядається задача про знаходження розв'язку $u(t,x)$ системи B-параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t,x) D^{\tilde{k}}_{\tilde{x}} B^{j}_{x_n} u = F(t,x), \qquad (1)$$

який задовольняє умови

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{|k|+2j\le r_i} b^{i}_{kj}(t,x') D^{\tilde{k}}_{\tilde{x}} B^{j}_{x_n} u(t,x)\Big|_{x_1=0} = g_i(t,x'), \qquad (3)$$

де $x=(x_1,x')$, $x'=(x_2,\dots,x_n)$, $\tilde{x}=x_1,\dots,x_{n-1}$, $B_{x_n} = \partial^2/\partial x_n^2 + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\partial/\partial x_n$, $\nu \ge -1/2$, − оператор Бесселя, $|\tilde{k}| = \sum_{l=1}^{n-1} k_l$, $i=\overline{1,bN}$.

Означення 1. Система (1) називається B-параболічною, якщо характеристичне рівняння

$$\det\left\{ \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(t,x)(i\tilde{\sigma}_1)^{\tilde{k}}(-\sigma_n^2)^j - \lambda E \right\} = 0$$

має всі корені $\lambda = \lambda(t,x,\sigma)$, в яких $Re\lambda \le -\delta|\sigma|^{2b}$, $\delta>0$, $x,\sigma\in E^{+}_{n}$, $t\in(-\infty;T)$.

Означення 2. Простором $\tilde{C}^{(m,s)}_{p}(\Pi^{+}_{-\infty})$ називатимемо клас функції $\varphi(t,x)$, які неперервні за сукупністю змінних, мають в шарі $\Pi^{+}_{-\infty}$ похідні за t до порядку m і s похідних за x, які спадають степеневим чином при $t\to-\infty$ та задовольняють нерівності

$$|D^{r}_{t} D^{k}_{x} B^{j}_{x_n}\varphi(t,x)| \le C_{rkj}(1+|t|)^{-p}, |k|+2j\le s, r\le m,$$

сталі $C_{rkj}, p>0$ не залежать від t та x.

Через $\tilde{C}^{(m,s+\alpha)}_{p}(\Pi^{+}_{-\infty})$, $0<\alpha<1$, позначатимемо клас функцій із $\tilde{C}^{(m,s)}_{p}(\Pi^{+}_{-\infty})$, у яких похідні порядку s гельдерові за x з показником α та задовольняють нерівність

$$|\Delta_x D^{k}_{x} B^{j}_{x_n}\varphi(t,x)| \le C_{kj}|\Delta_x|^{\alpha}(1+|t|)^{-p},$$

$|k|+2j=s$. Якщо $m=0$ і $s=0$, то в позначені класів верхні індекси опускатимемо і позначатимемо $\tilde{C}_p(\Pi^+_{-\infty})$, $\tilde{C}_p^{(\alpha)}(\Pi^+_{-\infty})$. Якщо $p=0$, то класи $\tilde{C}_0^{(m,s)}(\Pi^+_{-\infty})$ і $\tilde{C}_0^{(m,s+\alpha)}(\Pi^+_{-\infty})$ збігаються відповідно з класами $C_{t,x'}^{(m,s)}(\Pi^+_{-\infty})$ і $C_{t,x'}^{(m,s+\alpha)}(\Pi^+_{-\infty})$, причому норми в цим класах еквівалентні.

Нехай $\Pi'^+_{-\infty} \equiv (-\infty;T)\times E^+_{n-1}$, $E^+_{n-1}=E_{n-2}\times(0,\infty)$.

Означення 3. Через $\mathrm{A}_\eta^{(m)}(\Pi'^+_{-\infty})$, позначатимемо клас функцій $f(t,x')$, які визначені в області $\Pi'^+_{-\infty}$, мають похідні $D^k_{x'}B^j_{x_n}f$ до порядку $|k|+2j\le[m]$, які експоненціально спадають при $t\to-\infty$ і для яких справджуються оцінки

1) при $|k|+2j\le[m]$ $|D^k_{x'}B^j_{x_n}f|\le C_{kj}e^{\eta t}$, $\eta>0$;

2) при $|k|+2j=[m]$ $|\Delta_{x'}D^k_{x'}B^j_{x_n}f|\le C|\Delta x'|^{\{m\}}e^{\eta t}$;

3) при $|k|+2j\le[m]$ $|\Delta_t D^k_{x'}B^j_{x_n}f|\le C|\Delta t|^{\frac{m-(|k|+2j)}{2b}}e^{\eta t}$.

Означення 4 [1,с.72]. Через $C_\mu^{(m)}(\Pi'^+_{-\infty},\Pi'^+_{-\infty})$ позначатимемо клас функцій $f(t,x';M_0)$, які визначені в області $\Pi'^+_{-\infty}\times\Pi'^+_{-\infty}$, при $t>\tau$ мають похідні $D^k_{x'}B^j_{x_n}f$ до порядку $|k|+2j\le[m]$, для яких справджуються оцінки

1) при $|k|+2j\le[m]$ $|D^k_{x'}B^j_{x_n}f(t,x';M_0)|\le$

$$\le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{\mu+|k|+2j}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\},\ \mu>0;$$

2) при $|k|+2j=[m]$ $|\Delta_{x'}D^k_{x'}B^j_{x_n}f(t,x';M_0)|\le$

$$\le C|\Delta x'|^{\{m\}}(t-\tau)^{-\frac{m+\mu}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\};$$

3) при $|k|+2j\le[m]$ $|\Delta_t D^k_{x'}B^j_{x_n}f(t,x';M_0)|\le$

$$\le C|\Delta t|^{\frac{m-(|k|+2j)}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{m+\mu}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\},$$

де $T^{\xi_n}_{x_n}$ − оператор узагальненого зсуву, $\rho(t,\tau,x,\xi)=\sum_{i=1}^n|x_i-\xi_i|^q(t-\tau)^{-1/(2b-1)}$, $q=\dfrac{2b}{2b-1}$, $M_0=(\tau,\xi')\in\Pi'^+_{-\infty}$.

Далі введемо оператори дробового інтегрування та диференціювання

$$J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^t\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\alpha}}\times$$
$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\beta,x',y')f(\beta,y';M_0)y_n^{\nu_0}dy',\qquad(4)$$

$$D^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0)=\Lambda(D)J^{(1-\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0).\qquad(5)$$

$0<\alpha<1$, $\nu_0=2\nu+1$, $G_0(t-\beta,x',y')$ − фундаментальний розв'язок рівняння

$$\Lambda(D)u\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^b(\Delta_{x''}+B_{x_n})^b\right)u=0.$$

Інтегруючи частинами по змінній β рівність (5), оператор $D^{(\alpha)}_{x'}$ можна зобразити у вигляді

$$D^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x';M_0)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^t\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times$$
$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\beta,x',y')(f(\beta,y';M_0)-$$
$$-f(t,x';M_0))y_n^{\nu_0}dy'.\qquad(6)$$

Оператор $J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x')$ визначений на гельдерових функціях, які спадають при $t\to-\infty$, тобто $f\in\tilde{C}^{(\gamma)}_\varepsilon(\Pi'^+_{-\infty})$, де $\varepsilon>\alpha$, γ − показник Гельдера.

Твердження. *Якщо* $f\in\tilde{C}^{(\gamma)}_\varepsilon(\Pi'^+_{-\infty})$, *то*

$$D^{(\alpha)}_{x'}J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x')=f(t,x').$$

Доведення. Розпишемо дію операторів $J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))$ та скористаємось формулою згортки [1, с.71]. Будемо мати

$$J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^t\frac{d\beta}{(t-\beta)^\alpha}\times$$
$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\beta,x',y')\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^\beta\frac{d\beta}{(\beta-\tau)^{1-\alpha}}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(\beta-\tau,y',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'\right)y_n^{\nu_0}dy'=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^t d\tau\int_\tau^t\frac{d\beta}{(t-\beta)^\alpha(\beta-\tau)^{1-\alpha}}\times$$
$$\times\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\tau,x',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'=$$
$$=\int_{-\infty}^t d\tau\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\tau,x',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'.$$

Застосовуючи оператор $\Lambda(D)$ до $J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))$ та використовуючи те, що $D^{(\alpha)}_{x'}(f)=\Lambda(D)J^{(1-\alpha)}_{x'}(f)$, будемо мати

$$\Lambda(D)J^{(1-\alpha)}_{x'}(J^{(\alpha)}_{x'}(f))=$$
$$=\Lambda(D)\int_{-\infty}^t d\tau\int_{E^+_{n-1}}G_0(t-\tau,x',\xi')f(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi',$$

$D^{(\alpha)}_{x'}J^{(\alpha)}_{x'}(f)=f$, що й вимагалося довести.

Надалі використовуватимемо позначення $\mathrm{A}_{\eta}^{\left(\frac{s+\alpha}{2b},s+\alpha\right)}(\Pi'^{+}_{-\infty})\equiv C_{t,x'}^{\left(\frac{s+\alpha}{2b},s+\alpha\right)}(\Pi'^{+}_{-\infty})\cap \mathrm{A}_{\eta}^{(s)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$.

Теорема *(про дію оператора дробового диференціювання). Якщо функція* $f\in \mathrm{A}_{\eta}^{(m)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$, $\eta>0$, *то* $D_{x'}^{(\alpha)}(f)\in \mathrm{A}_{\eta}^{(m-2b\alpha)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$.

Доведення. Продиференціюємо $D_{x'}^{(\alpha_m)}f$ з (6) та розіб'ємо інтеграл

$$D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left(D_{x'}^{(\alpha)}f(t,x')\right)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{t-1}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times\right.$$
$$\times\int\limits_{E_{n-1}^{+}}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left[G_0(t-\beta,x',y')\times\right.$$
$$\times(f(\beta,y')-f(t,x'))\big]y_n^{\nu_0}dy'+$$
$$+\int\limits_{t-1}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\int\limits_{E_{n-1}^{+}}(...)dy'\equiv I_1+I_2.$$

Оцінимо кожен доданок. В інтегралі I_1 скористаємось властивістю 6.2 G_0 з [1, с.71]. Тоді I_1 перепишеться у вигляді

$$I_1=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{t-1}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}\frac{D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times\right.$$
$$\left.\times f(\beta,y')y_n^{\nu_0}dy'-C_{\alpha}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}f(t,x')\right)\equiv I_1^{(1)}-I_1^{(2)}.$$

В I_1 різницю оцінимо за модулем і врахуємо оцінки G_0 та умову 1) означення 3. Тоді

$$|I_1^{(1)}|\le\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{t-1}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}C(t-\beta)^{-\frac{n_\nu-1+2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}\times$$
$$\times T_{x_n}^{y_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x',y'')}\right\}e^{\eta\beta}y_n^{\nu_0}dy'\le$$
$$\le C\int\limits_{-\infty}^{t-1}(t-\beta)^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}e^{\eta\beta}d\beta.$$

Проводячи заміну змінної $t-\beta=h$, $1\le h<\infty$, дістанемо

$$|I_1^{(1)}|\le Ce^{\eta t}\int\limits_{1}^{\infty}h^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}e^{-\eta h}dh\le Ce^{\eta t}.$$

Аналогічна оцінка виконується і для $I_1^{(2)}$. Для оцінки I_2 розпишемо різницю

$$f(\beta,y')-f(t,x')=f(\beta,y')-f(t,y')+$$
$$+f(t,y')-f(t,x').$$

Тоді I_2 перепишеться у вигляді

$$I_2=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{t-1}^{t}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}\frac{D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times$$
$$\times(f(\beta,y')-f(t,y'))y_n^{\nu_0}dy'+$$
$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{t-1}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\int\limits_{E_{n-1}^{+}}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left[G_0(t-\beta,x',y')\times\right.$$
$$\times(f(t,y')-f(t,x'))\big]y_n^{\nu_0}dy'\equiv I_2^{(1)}+I_2^{(2)}.$$

Оцінимо $I_2^{(1)}$, користуючись умовою Гельдера функції $f(t,x')$ по першому аргументу

$$|I_2^{(1)}|\le C\int\limits_{t-1}^{t}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}C(t-\beta)^{-\frac{n_\nu-1+2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}\times$$
$$\times T_{x_n}^{y_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x',y'')}\right\}(t-\beta)^{\frac{m}{2b}}e^{\eta\beta}y_n^{\nu_0}dy'\le$$
$$\le C\int\limits_{t-1}^{t}(t-\beta)^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j-m}{2b}}e^{\eta\beta}d\beta.$$

Виконуючи заміну змінної $t-\beta=h$, $0\le h\le 1$, і враховуючи нерівність $e^{-\eta h}\le 1$, матимемо

$$|I_2^{(1)}|\le Ce^{\eta t}\int\limits_{0}^{1}h^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j-m}{2b}}e^{-\eta h}dh\le$$
$$\le Ce^{\eta t}\left.h^{-\frac{2b\alpha+|k|+2j-m}{2b}}\right|_0^1\le Ce^{\eta t},\ |k|+2j\le\left[m-2b\alpha\right].$$

При оцінці інтеграла $I_2^{(2)}$ скористаємось формулою Тейлора-Дельзарта [4]

$$f(t,y')-f(t,x')=$$
$$=\sum_{|r|+2p=1}^{[m]-1}C_{rp}D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,x')(y'-x')^{r}y_n^{2p}+o(|x'-y'|^{[m]-1}).$$

Тоді $|I_2^{(2)}|\le C\int\limits_{t-1}^{t}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}\frac{D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')}{(t-\beta)^{1+\alpha}}\times$

$$\times\sum_{|r|+2p=[m]}C_{rp}\,|D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,\tilde{x}')-D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,x')|\times$$
$$\times|y'-x'|^{r}\,y_n^{2p}y_n^{\nu_0}dy',\quad \tilde{x}'=x'+\theta(x'-y').$$

Далі використаємо умову Гельдера $D_{x'}^{r}B_{x_n}^{p}f(t,x')$ з показником $\{m\}$

$$|I_2^{(2)}|\le C\int\limits_{t-1}^{t}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}C(t-\beta)^{-\frac{n_\nu-1+2b(1+\alpha)+|k|+2j}{2b}}\times$$
$$\times T_{x_n}^{y_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x',y'')}\right\}|y-x'|^{[m]+\{m\}}e^{\eta\beta}y_n^{\nu_0}dy'\le$$
$$\le C\int\limits_{t-1}^{t}(t-\beta)^{-\frac{2b(1+\alpha)+|k|+2j-m}{2b}}e^{\eta\beta}d\beta\le Ce^{\eta t}.$$

З оцінок інтегралів I_1 та I_2 випливає твердження теореми.

Побудова розв'язку загальної крайової задачі без початкових даних

Розв'язок задачі (1) − (3) відшукуємо у вигляді $u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x),$ де $u_1(t,x)$ − розв'язок задачі $L(t,x,D)u=F(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial x_n\,|_{x_n=0}=0$, $L(t,x,D)$ − оператор системи (1), а $u_2(t,x)$ − розв'язок крайової задачі $L(t,x,D)u=0$, $\partial u/\partial x_n\,|_{x_n=0}=0$, $\overline{B}_i(t,x',D)u(t,x)\big|_{x_1=0}=g_l(t,x')-$ $-B_i(t,x',D)u_1(t,x)\big|_{x_1=0}\equiv\overline{g}_l(t,x')$, B_i − крайовий оператор з (3), $i=\overline{1,bN}$.

Розв'язок $u_1(t,x)$ зображається у вигляді згортки фундаментальної матриці розв'язків $Z(t,\tau,x,\xi)$ системи (1) та неоднорідності $F(t,x)$. Якщо для $Z(t,\tau,x,\xi)$ справджується умова Λ_1 [2], то u_1 існує при $F\in\tilde{C}^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}(\Pi^+_{-\infty})$. Для знаходження $u_2(t,x)$ скористаємось алгоритмом, описаним в роботі [1, с.82-94]. Розглянемо відповідну модельну задачу

$$\tilde{L}(\tau,\xi,D)u_2(t,x)=0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0,\overline{B}^{(0)}_i u_2(t,x)\,|_{x_1=0}=\overline{g}_1(t,x'), \tag{8}$$

де $\tilde{L}(\tau,\xi,D)$ − оператор системи (1), $\overline{B}^{(0)}_i(\tau,\xi',D)$ − крайовий оператор. Оператори $\tilde{L}$ і $\overline{B}^{(0)}_i$ містять лише групу старших, коефіцієнти "заморожені" в точці (τ,ξ).

Далі розглянемо функції типу ядер Пуассона

$$T^{\xi_n}_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x_1,x''-\xi'',x_n;\tau,\xi')\equiv$$
$$\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')=J^{(\alpha_m)}_{x'}\mathsf{G}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')$$

де $J^{(\alpha_m)}_{x'}$ − оператор дробового інтегрування, що відповідає оператору $\Lambda(D)$, $\lambda_m\in(0;1)$, $m=\overline{1,bN}$. Функції типу ядер Пуассона $\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m$ задовольняють нерівність [1, с.85]

$$|D^k_x B^j_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')|\le$$
$$\le C_{kjm}(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-r_m-2b\alpha_m+|k|+2j}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\} \tag{9}$$

Візьмемо $\alpha_m=(2b-r_m-\varepsilon)/2b$ і розглянемо об'ємний потенціал

$$W_m(t,\tau,x,\xi')=\int_\tau^t d\beta\int_{E^+_n}Z(t,\beta,x,y)\times$$
$$\times L(\beta,y,D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(\beta-\tau,y-\xi'';\tau,\xi')y_n^{\nu_0}dy, \tag{10}$$

де Z − фундаментальна матриця розв'язків, яку можна побудувати, якщо продовжити коефіцієнти системи в півпростір $x_1<0$, наприклад, парним чином зі збереженням гладкості. Оскільки $\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m$ − функції типу ядер Пуассона задачі (7) − (8), то

$$L(t,x,D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m=\sum_{|k|+2j=2b}[A_{kj}(\tau,\xi)-A_{kj}(t,x)]\times$$
$$\times D^k_{\tilde{x}}B^j_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m-\sum_{|k|+2j<2b}A_{kj}(t,x)D^k_{\tilde{x}}B^j_{x_n}\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m.$$

Використовуючи умову Гельдера коефіцієнтів A_{kj}, $|k|+2j=2b$, та оцінки похідних функцій типу ядер Пуассона (9), дістанемо оцінку щільності об'ємного потенціала (10)

$$|L(t,D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi)|\le$$
$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha+\varepsilon}{2b}}T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\}, \tag{11}$$

$0<\varepsilon<\alpha$. На основі леми 3.1 [1, с.36] визначається порядок особливості W_m, який на α менший від порядку особливості $\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m$. В результаті застосування оператора $L(t,x,D)$ до $W_m(t,\tau,x,\xi')$ одержимо щільність $L(t,D_x)G^{(\alpha_m)}_m$.

Розв'язок крайової задачі відшукуємо у вигляді поверхневого потенціалу

$$u_2(t,x)=\sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^t d\tau\int_{E^+_{n-1}}\mathrm{E}^{(\alpha_m)}_m(t,\tau,x,\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi',$$

де $\mathrm{E}^{(\alpha_m)}_m=\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m-W_m$, $\mu_m(t,x')$ − шукані функції, які спадні при $t\to-\infty$. Для визначення функцій $\mu_m(t,x')$ задовольнимо крайові умови $\overline{B}_i u_2(t,x)|_{x_1=0}=\overline{g}_i(t,x)$. В результаті дістанемо систему інтегральних рівнянь Вольтера-Фредгольма першого роду

$$J^{(\alpha_l)}_{x'}\mu_l(t,x')+\sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^t d\tau\int_{E^+_{n-1}}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\times$$
$$\times\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'=\overline{g}_l(t,x'), \tag{12}$$
$$E_{lm}(t,\tau,x',\xi')=$$
$$=\overline{B}^{(0)}_i(t,x',D)\Big[\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')-$$
$$-\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';t,x')\Big]+$$
$$+\overline{B}^{(1)}_i(t,x',D)\mathsf{G}^{(\alpha_m)}_m(t-\tau,x-\xi'';\tau,\xi')-W_m(t,\tau,x,\xi').$$

де $\overline{B}^{(1)}_i(t,x',D)$ − крайовий оператор, який містить групу молодших. Зауважимо, що перший доданок в (12) має сенс при $\mu_l\in\tilde{C}_{\frac{2b-\eta-\varepsilon}{2b}+\varepsilon_1}(\Pi'^+_{-\infty})$.

Далі застосуємо до (12) оператор дробового диференціювання, враховуючи сформульоване вище твердження. В результаті будемо мати

$$\mu_l(t,x') = D_{x'}^{(\alpha_l)}\overline{g}_l(t,x') -$$

$$-\sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{(\alpha_l)}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'. \quad (13)$$

Якщо $b_{kj}^{(i)} \in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Pi_{-\infty}'^{+})$, то на основі оцінок функцій типу ядер Пуассона $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}$ маємо, що $E_{lm} \in C_{n_\nu-1+\eta+\varepsilon-\alpha}^{(2b-\eta+\alpha)}(\Pi_{-\infty}'^{+},\Pi_{-\infty}'^{+})$. Покажемо, що при дії оператора $D_{x'}^{(\alpha_m)}$ гладкість зменшується на $2b\alpha_m$, а особливість збільшується на $2b\alpha_m$, тобто

$$D_{x'}^{(\alpha_m)}E_{lm} \in C_{n_\nu-1-\alpha+2b}^{(\alpha+\varepsilon)}(\Pi_{-\infty}'^{+},\Pi_{-\infty}'^{+}).$$

Враховуючи зображення $D_{x'}^{(\alpha_m)}$ з (6), продиференціюємо $D_{x'}^{(\alpha_m)}E_{lm}$ та розіб'ємо на інтеграли

$$D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left(D_{x'}^{(\alpha_m)}E_{lm}\right) = \frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_m}}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}\left[G_0(t-\beta,x',y')\times\right.$$

$$\left.\times(E_{lm}(\beta,\tau,y',\xi') - E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\right]y_n^{\nu_0}dy' +$$

$$+\frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_m}}\int_{E_{n-1}^{+}}(\ldots)dy' \equiv H_1 + H_2.$$

Перепишемо H_1, користуючись властивістю 6.2 $G_0(t,x',y')$ з [1, с.71]

$$H_1 = \frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{1+\alpha_m}}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}^{+}} D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}G_0(t-\beta,x',y')E_{lm}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{\nu_0}dy' -$$

$$-\frac{\alpha_m}{\Gamma(1-\alpha_m)}C_{\alpha_m}(t-\tau)^{-\alpha_m}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}E_{lm}(t,\tau,x',\xi').$$

Оскільки функції типу ядер Пуассона $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau,x-\xi'') \equiv 0$ при $t<\tau$, то із зображення E_{lm} легко бачити, що $E_{lm}(t,\tau,x',\xi') \equiv 0$ при $t<\tau$, тому перший доданок з H_1 дорівнює нулеві. Оцінимо другий доданок з H_1, враховуючи оцінку 1) означення 4. В результаті дістанемо

$$|H_1| \le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{2b\alpha_m+\mu+|k|+2j}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\}.$$

Аналогічні оцінки одержуються для H_2. Для цього слід провести такі ж міркування, як і при доведенні теореми 6.2 з [1, с.73] про дію оператора дробового диференціювання.

Тоді інтеграл з (13) існуватиме при $\mu_m \in \tilde{C}_{\frac{\alpha}{2b}+\varepsilon_1}(\Pi_{-\infty}'^{+})$, $\varepsilon_1 > 0$.

Позначимо $K_{lm}(t,\tau,x',\xi') \equiv -D_{x'}^{(\alpha_l)}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')$. Розв'язок (13) шукаємо методом послідовних наближень. Для ядра K_{lm} правильна оцінка

$$|K_{lm}(t,\tau,x',\xi')| \le C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho}\right\}.$$

Наступні ядра визначаються у вигляді

$$K_{lm}^{(p)}(t,\tau,x',\xi') = \int_{\tau}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}\sum_{s=1}^{bN}K_{ls}(t,\beta,x',y')\times$$

$$\times K_{sm}^{(p-1)}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{\nu_0}dy',$$

$l,s,m=\overline{1,bN}$, $p\in\mathbb{N}$, $K_{lm}^{(1)} \equiv K_{lm}^{(p)}$.

Ядра $K_{lm}^{(p)}(t,\tau,x',\xi')$ до індексу $p=\left[(n_\nu-1+2b)/\alpha\right]$ задовольняють оцінку

$$|K_{lm}^{(p)}(t,\tau,x',\xi')| \le C^{p+1}C(\varepsilon)^{p-1}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-p\alpha}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-(c-(p-1)\varepsilon)\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\},$$

а всі наступні ядра $K_{lm}^{(p)}$ задовольняють оцінку

$$|K_{lm}^{(p_0+s)}(t,\tau,x',\xi')| \le C^s A_{p_0}^s(t-\tau)^{\frac{s\alpha+\gamma}{2b}}\times$$

$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\}B\left(\frac{\alpha}{2b};\frac{\gamma}{2b}+1\right)\times$$

$$\times B\left(\frac{\alpha}{2b};\frac{\alpha+\gamma}{2b}+1\right)\ldots B\left(\frac{\alpha}{2b};\frac{s\alpha+\gamma}{2b}+1\right), \quad (14)$$

де $p_0 = p+1$, $A_{p_0} = C^{p_0+1}C(\varepsilon)^{p_0-1}$, $\gamma > 0$, $c_{p_0} = c-(p_0-1)\varepsilon$.

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (13) визначається за допомогою резольвенти

$$R_{lm}(t,\tau,x',\xi') = K_{lm}(t,\tau,x',\xi') +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{bN}\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{E_{n-1}^{+}}K_{ls}(t,\beta,x',y')K_{sm}^{(j)}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{\nu_0}dy'.$$

Для того, щоб отримати оцінку резольвенти, позначимо праву частину з (14) через S та використаємо зв'язок між бетта- та гамма-функціями. В результаті отримаємо ряд

$$S = T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho}\right\}\sum_{s=0}^{\infty}A^s(t-\tau)^{\frac{s\alpha}{2b}}\frac{\Gamma^s(\alpha/2b)}{\Gamma(s\alpha/2b+1)},$$

$A = CA_{p_0}$. Для встановлення асимптотики отриманого ряду використаємо з [3, с.323] поведінку функції Міттаг-Лефлера

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \sim \frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}}.$$

Тоді $S \le T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho}\right\} e^{\left(A(t-\tau)^{\alpha/2b}\Gamma(\alpha/2b)\right)^{2b/\alpha}} \le$

$$\le T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho}\right\} Ce^{c_1(t-\tau)}$$

і для $R_{lm}(t,\tau,x',\xi')$ правильною є оцінка

$$|R_{lm}(t,\tau,x',\xi')| \le C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}} \times$$
$$\times e^{(c_1+\varepsilon)(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\}. \quad (15)$$

Розв'язок системи (13) визначається формулою

$$\mu_m(t,x') = D_{x'}^{(\alpha_m)}\overline{g}_m(t,x') -$$
$$-\sum_{s=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^{+}} R_{ms}(t,\tau,x',\xi') D_{\xi'}^{(\alpha_m)}\overline{g}_s(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi'. \quad (16)$$

Якщо $\overline{g}_s \in \mathrm{A}_\eta^{(2b-r_s+\alpha)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$, то згідно з теоремою про дію оператора дробового диференціювання $D_{x'}^{(\alpha_s)}\overline{g}_s \in \mathrm{A}_\eta^{(\varepsilon+\alpha)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$. Оцінимо $\mu_m(t,x')$ з (16). Для цього позначимо другий доданок в (16) через $R(t,x')$ та оцінимо, враховуючи оцінку резольвенти. В результаті дістанемо

$$|R(t,x')| \le \sum_{s=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^{+}} (t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}} \times$$
$$\times e^{(c_1+\varepsilon)(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_{p_0}\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\} e^{\eta\tau}\xi_n^{\nu_0}d\xi' \le$$
$$\le \sum_{s=1}^{bN} e^{(c_1+\varepsilon)t}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} e^{(\eta-(c_1+\varepsilon))\tau}d\tau.$$

Проводячи заміну змінної $t-\tau=h$, $0\le h<\infty$, будемо мати

$$|R(t,x')| \le \sum_{s=1}^{bN} e^{\eta t}\int_0^\infty h^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} e^{-(\eta-(c_1+\varepsilon))h}dh \le Ce^{\eta t}.$$

Перший доданок з (16) задовольняє аналогічну оцінку,тому для $\mu_m(t,x')$ маємо $|\mu_m(t,x')| \le Ce^{\eta t}$.

З останньої оцінки випливає, що всі обмеження по t на функції $\mu_m(t,x')$, які вимагалися при побудові розв'язку крайової задачі без початкових даних, будуть виконуватися. Підставляючи знайдені функції $\mu_m(t,x')$ у формулу для знаходження $u_2(t,x)$ і проводячи заміну порядку інтегрування, отримаємо, що

$$u_2(t,x) = \sum_{m=1}^{bN}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^{+}} \tilde{E}_m(t,\tau,x,\xi') \times$$
$$\times D_{\xi'}^{(\alpha_m)}\overline{g}_m(\tau,\xi')\xi_n^{\nu_0}d\xi',$$

де

$$\tilde{E}_m(t,\tau,x,\xi') = \mathrm{E}_m^{(\alpha_m)}(t,\tau,x,\xi') +$$
$$+\sum_{m=1}^{bN}\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_{n-1}^{+}} \mathrm{E}_s^{(\alpha_m)}(t,\beta,x,y') R_{ms}(\beta,\tau,y',\xi') y_n^{\nu_0}dy'.$$

Теорема. *Припустимо, що для задачі (1) − (3) виконуються умови: система рівнянь (1) B-параболічна в $\Pi^{+}_{-\infty}$, фундаментальна матриця розв'язків $Z(t,\tau,x\xi)$ задовольняє умову Λ_1, виконується умова Лопатинського для відповідної модельної задачі, коефіцієнти системи $A_{kj} \in C_{t,x}^{(\alpha)}(\Pi^{+}_{-\infty})$ та крайового оператора $b_{kj}^{(i)} \in C^{(2b-\eta+\alpha)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$, функція $F \in \tilde{C}_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}(\Pi^{+}_{-\infty})$, крайові функції $g_l \in \mathrm{A}_\eta^{\left(\frac{2b-\eta+\alpha}{2b},2b-\eta+\alpha\right)}(\Pi'^{+}_{-\infty})$.*

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) − (3), який належить класу $C_{x,t}^{(2b+\alpha,1)}(\Pi^{+}_{-\infty})$ і справджується нерівність

$$|u|_{2b+\alpha} \le C\left(|F|_{1+\varepsilon}^{\alpha} + \sum_{l=1}^{bN}|g_l|_{2b-\eta+\alpha}\right),$$

де $|\cdot|_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}$ − норма в $\tilde{C}_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}$, $|\cdot|_{2b-\eta+\alpha}$ − норма в $\mathrm{A}_\eta^{(m,s)}$.

Список використаних джерел

1. Matiichuk M.I. Parabolic singular boundary value problems. − Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1999. − 176 p. (in Ukrainian).
2. Eidelman S.D. Parabolic systems. − Moscow: Nauka, 1964. − 442 p. (in Russian).
3. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Koshubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. − Basel: Birdhouses, 2004. − 390 p.
4. Levitan B.N. Bessel function expansions in series and Fourier integrals // Uspekhi Mat. Nauk. − 1951. − Vol. 42, N 6. − P. 102-143. (in Russian).
5. Tikhonov A.N. Uniqueness theorems for the heat equation // Matematichesky sbornik. − 1935. − Vol. 42, N 2. − P. 199-216. (in Russian).
6. Lavrenchuk V.P., Matiichuk M.I. Global solvability of a quasilinear parabolic system and a problem without initial conditions // Ukr. Math. Zh. −1982. − Vol. 34, N 6. − P. 710-717. (in Russian).

Надійшла до редколегії 29.09.11