

УДК 539.595

Лимарченко В.О., аспірант

Нелінійні коливання трубопроводу з рідиною при поздовжній вібрації основи трубопроводу

Досліджується задача коливань трубопроводу з рідиною на віброуючій основі. Система складається з труби кругового перетину, що консольно закріплена на рухомій основі. Розглядається поведінка системи при поздовжній вібрації основи трубопроводу в комбінації з малим початковим відхиленням по одній з форм коливань. Отримано графіки коливання кінця балки для різних частот вібрації основи. Проаналізовано умови, при яких система може приймати альтернативне положення рівноваги.

Ключові слова: трубопровід, швидкісна течія рідини, рухома основа, дискретна модель системи, сили взаємодії.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03187м. Київ, вул. Глушкова, 4-е е-mail: vladimir_limarchenko@yahoo.com

Limarchenko V.O., postgraduate student

Nonlinear oscillations of pipeline with liquid under longitudinal vibration of the pipeline foundation

The problem of oscillations of pipeline with flowing liquid on vibrating foundation is under consideration. The system consists of tube of circular cross-section, attached as cantilever to a moving foundation. We consider behavior of the system for longitudinal vibration of pipeline foundation with a small initial deviation of one of the forms of pipeline oscillations. Graphs of motion of the free end of pipeline were obtained. The conditions under which the system can take alternative equilibrium have been analyzed.

Keywords: pipeline, high-speed liquid flow, moving foundation, discrete model of the system, forces of interaction.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03187, Kyiv, Glushkova str., 4-e e-mail: vladimir_limarchenko@yahoo.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор В.Т. Маципура

Вступ

Розглядаємо механічну систему, яка складається з рухомої основи маси $M_{осн}$, трубопроводу, який описується за моделлю балки зі згинною жорсткістю EJ , площею поперечного перерізу F та масою $M_{TP} = \mu l$, де μ — лінійна густина, а l — довжина трубопроводу, й ідеальної, однорідної, нестисливої рідини, яка має масу $M_p = \rho l$ (ρ — лінійна густина рідини), та рухається в трубопроводі з заданою швидкістю $V(t)$. Вважаємо що рух системи відбувається в одні площині. Схематично така система зображена на Рис.1.

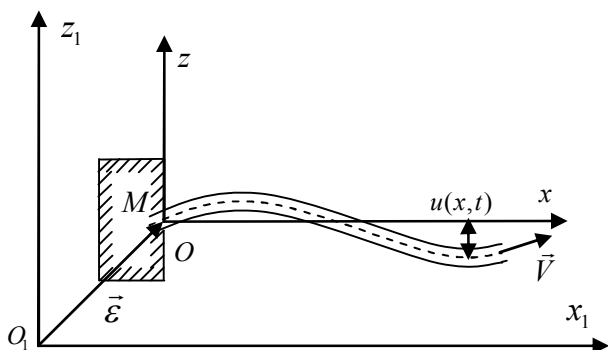


Рис.1. Трубопровід – рідина на рухомій основі

В більшості попередніх робіт [1–3] основа трубопроводу вважається нерухою. Метою роботи є аналіз впливу вібрацій рухомої основи на коливання такої системи. Для цього на основі підходів робіт [1, 4, 5], було побудовано модель коливань системи з урахуванням впливу вібрації основи на рух трубопроводу з рідиною. Використовувався мішаний (ейлерово-лагранжевий) опис руху складових системи, що дозволило отримати дискретну модель руху системи на основі методу модальної декомпозиції.

Математична модель системи

Побудова моделі полягає в отриманні функції Лагранжа для подальшого складання рівнянь руху на основі рівнянь Лагранжа 2-го роду.

Функція Лагранжа системи має вигляд ($\varepsilon_x, \varepsilon_z$ – параметри, що відповідають за зміщення основи трубопроводу у відповідних напрямках):

$$L = T_p + T_{TP} + T_{осн} - \Pi_p - \Pi_3 - \Pi_{ст} - \Pi_{осн} = \\ = \frac{1}{2} M_{осн} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) - F_x \varepsilon_x - F_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \rho \int_0^l [V^2 + \dot{\varepsilon}_z^2] + \\ + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\varepsilon}_z + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{7}{2} V^2 - 2V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 - \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_z^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial u}{\partial x} [2V \dot{\varepsilon}_z - 2\dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z] + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} [4V - 2\dot{\varepsilon}_x] + \\
 & + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 [-4V \dot{\varepsilon}_z + 5\dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z] + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 [-3\dot{\varepsilon}_z] + \\
 & + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \left[-\frac{13}{8} V^2 + 4V \dot{\varepsilon}_z - \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x^2 + \frac{27}{8} \dot{\varepsilon}_z^2 \right] + \\
 & + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 [3\dot{\varepsilon}_x] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left\{ dx + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left\{ \dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\varepsilon}_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 [\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2] + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \dot{\varepsilon}_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \right. \\
 & - \left. \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 [\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_z^2] \right\} dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 u dx - \\
 & - \frac{1}{2} PF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Якщо прирівняти ε_x , ε_z до нуля, ця функція співпадає з результатами роботи [5].

Для побудови дискретної моделі системи виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді: $u(x, t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t)$.

Тут N — кількість форм коливань трубопроводу.

Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за $A_i(x)$ беремо форми коливань труби як балки з рідиною. В результаті дискретизації функції Лагранжа рівняння Лагранжа 2-го роду набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
 \ddot{c}_r = & - \frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \\
 & + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \\
 & - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkr}^2 - \\
 & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkr}^2 - \frac{1}{2} d_{krj}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\
 & - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^3 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 + \\
 & + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \psi_r^1 [V \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z] + \\
 & + \frac{1}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N c_i \beta_{ir}^2 \left[-2\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left(\rho + \frac{1}{2} \mu \right) + \dot{\varepsilon}_z^2 \left(\frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho \right) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) \dot{\varepsilon}_x + \\
 & + \frac{3\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi_{ijr}^3 \left[-2V \dot{\varepsilon}_z + \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z \right] + \\
 & + \frac{\mu - 3\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j (\phi_{irj}^2 - \phi_{jir}^2) \dot{\varepsilon}_z + \\
 & + \frac{9\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k (d_{ijrk}^3 - d_{kijr}^3) \dot{\varepsilon}_x + \\
 & + \frac{2}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijk}^4 \left[-4\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left(-\frac{5}{2} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) + \right. \\
 & + \left. \dot{\varepsilon}_z^2 \left(\frac{27}{8} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] - \frac{1}{N_r} \psi_r^0 \ddot{\varepsilon}_z + \\
 & + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \dot{\varepsilon}_x + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \ddot{\varepsilon}_x - \\
 & - \frac{\mu - 3\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi_{ijr}^2 \ddot{\varepsilon}_z - \frac{3\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijk}^3 \ddot{\varepsilon}_x.
 \end{aligned}$$

Введені величини ψ_i^0 , ψ_i^1 , N_i , β_{ij}^1 , β_{ij}^2 , κ_i^4 , ϕ_{ijk}^2 , ϕ_{ijk}^3 , d_{ijkl}^2 , d_{ijkl}^3 , d_{ijkl}^4 , d_{ijkl}^6 є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області та визначаються чисельно.

Отримана система рівнянь описує рух системи при заданому законі вібрації основи. Для випадку сумісного руху трубопроводу з рідиною та його основи до попередньої системи рівнянь маємо додати ще два рівняння відносно зміщень ε_x , ε_z , які матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varepsilon}_x = & - \frac{F_x}{M_{cuc}} + \frac{1}{M_{cuc}} \left\{ \rho \sum_{i=1}^N c_i \psi_i^1 \ddot{\varepsilon}_z + \rho \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \psi_i^1 \dot{\varepsilon}_z - \right. \\
 & - \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \beta_{ij}^2 \left[\ddot{\varepsilon}_x \left(\rho + \frac{1}{2} \mu \right) - \rho \dot{V} \right] - \\
 & - 2 \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j \beta_{ij}^2 \left[\dot{\varepsilon}_x \left(\rho + \frac{1}{2} \mu \right) - \rho V \right] + \rho \sum_{i,j=1}^N \dot{c}_i \dot{c}_j \beta_{ij}^1 - \\
 & - \rho \sum_{i,j=1}^N c_i \ddot{c}_j \beta_{ij}^1 - \rho \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k \phi_{ijk}^3 \left[\frac{5}{2} \ddot{\varepsilon}_z \right] - \\
 & - 3\rho \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k \phi_{ijk}^3 \left[\frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_z \right] - \frac{9}{2} \rho \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j \dot{c}_k \dot{c}_l d_{ijkl}^3 - \\
 & - \frac{3}{2} \rho \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k \ddot{c}_l d_{ijkl}^3 - \\
 & - \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 \left[2\dot{V} \rho + \ddot{\varepsilon}_x \left(-\frac{5}{2} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] - \\
 & - \left. 4 \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k \dot{c}_l d_{ijkl}^4 \left[2V \rho + \dot{\varepsilon}_x \left(-\frac{5}{2} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_z = & -\frac{F_z}{M_{cuc}} - \frac{1}{M_{cuc}} \left\{ \rho \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \psi_i^1 V + \right. \\ & + \rho \sum_{i=1}^N c_i \psi_i^1 \dot{V} + (\rho + \mu) \sum_{i=1}^N \ddot{c}_i \psi_i^0 + \\ & + \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \beta_{ij}^2 \left[\ddot{\varepsilon}_z \left(\frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho \right) \right] + \\ & + 2 \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j \beta_{ij}^2 \left[\dot{\varepsilon}_z \left(\frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho \right) \right] + \\ & + \rho \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k \phi_{ijk}^3 \left[-2\dot{V} + \frac{5}{2} \ddot{\varepsilon}_x \right] + \\ & + 3\rho \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k \phi_{ijk}^3 \left[-2V + \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \ddot{c}_k \phi_{ijk}^2 (\mu - 3\rho) + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^N c_i \dot{c}_j \dot{c}_k \phi_{ijk}^2 (\mu - 3\rho) + \\ & + \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 \left[\ddot{\varepsilon}_z \left(\frac{27}{8} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] + \\ & \left. + 4 \sum_{i,j,k,l=1}^N c_i c_j c_k \dot{c}_l d_{ijkl}^4 \left[\dot{\varepsilon}_z \left(\frac{27}{8} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Систему рівнянь руху шляхом зниження порядку можна легко звести до форми Коші та інтегрувати чисельно методом Рунге-Куты. Для випадку сумісного руху трубопроводу з рідиною, необхідно вирішити лінійну алгебраїчну задачу, щоб всі рівняння системи містили другу похідну по змінній в лівій частині та вирази відносно змінних та їх перших похідних в правій частині. В цілому система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів деформації трубопроводу, а у випадку сумісного руху – ще й зміщень ε_x , ε_z .

Аналіз руху системи трубопровід – рідина при поздовжній вібрації основи

В результаті чисельного моделювання було отримано та проаналізовано дані про поведінку системи трубопровід – рідина для випадку руху основи в поздовжньому напрямку O_1x_1 відносно труби (Рис. 1). Труба довжиною 1 м, виготовлена з алюмінію. Швидкість руху рідини вздовж трубопроводу вважається постійною.

У випадку поздовжнього збурення, на відміну від випадку поперечного збурення, задати ли-

ше закон коливання основи виявляється недостатнім для ініціювання коливань трубопроводу. Необхідно також надати балці деяке відхилення від прямолінійної форми.

Зауважимо, що критична швидкість течії рідини $V_{кр} = 20,94 \text{ м/с}$, а власна частота першої форми коливань балки $\omega_1 = 40,27$. Відлік часу проводиться в періодах першої форми коливань $T_1 = 0,1567 \text{ с}$.

Надамо системі збурення за рахунок вібрації основи в напрямку O_1x_1 : $\varepsilon_x = A \sin(\omega t)$. Водночас надамо трубі відхилення 2 см по першій формі коливань. Початкові умови задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} c_1(0) &= 0,02, \quad c_i(0) = 0, \quad i = \overline{2,10}; \\ \dot{c}_i(x,0) &= 0, \quad i = \overline{1,10}. \end{aligned}$$

Для різних параметрів збурення A, ω та різних швидкостей рідини в трубі V знайдено графіки руху вільного кінця балки по осі Oz та порівняльні графіки впливу форм коливань на процес руху системи. Наведемо деякі з них.

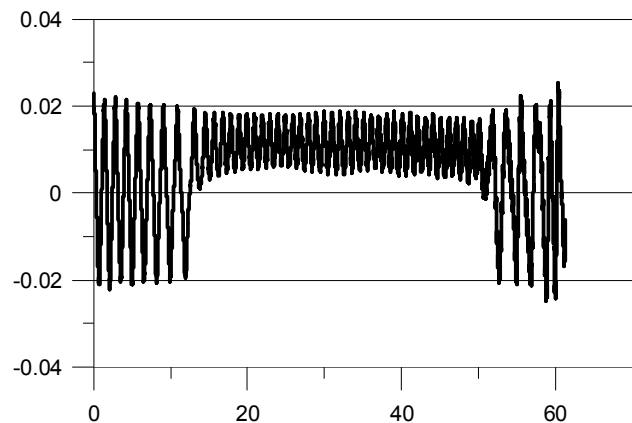


Рис. 2. Графік коливань кінця труби при $V=15 \text{ м/с}$; $A_x = 0,002$; $\omega_x = 40$; $c_1(0) = 0,023$

Випадки коливань, наведені на Рис. 2–4 відрізняються лише початковими відхиленнями по першій формі, але розміри цих відхилень близькі. З Рис. 2, 3 видно, що система переходить до коливань навколо альтернативного положення рівноваги, яке в першому випадку знаходиться над віссю Ox , а в другому випадку – під віссю Ox .

На Рис. 4 бачимо, що невелике збільшення початкового відхилення по першій формі призводить до якісної зміни характеру процесу коливань. Система вже не здійснює переходу до альтернативного положення рівноваги. Картина коливань регулярна та характеризується швидким збільшенням амплітуди коливань.

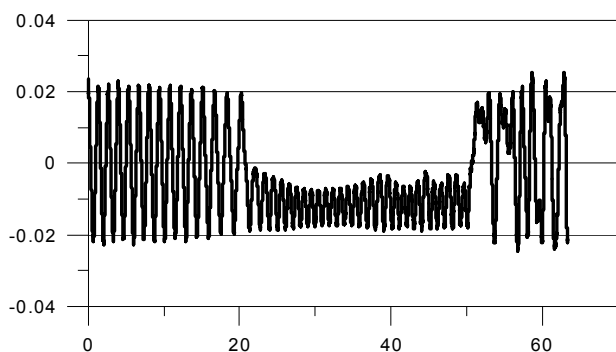


Рис. 3. Графік коливань кінця труби при $V=15$ м/с; $A_x = 0,002$; $\omega_x = 40$; $c_1(0) = 0,0235$

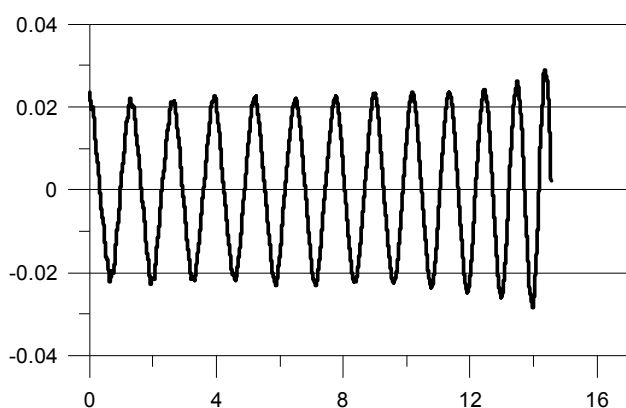


Рис. 4. Графік коливань кінця труби при $V=15$ м/с; $A_x = 0,002$; $\omega_x = 40$; $c_1(0) = 0,0237$

Якщо збільшити частоту коливань, можливі процеси одночасного виходу на альтернативне положення та модуляції коливань (модуляція зазвичай пов'язана із збільшенням частоти). З Рис. 5 видно, що вихід на альтернативне положення рівноваги здійснюється за рахунок зміщення по першій формі, друга форма продовжує коливатись відносно прямолінійного положення.

Список використаних джерел

1. Bondar, N.G. Nonlinear Autonomous Problems in Mechanics of Elastic Systems— Kyiv: Budivelnik, 1971. — 140 p. (in Russian)
2. Kuiper, G. L. Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid // Journal of Fluids and Structures, 2008. — № 24. — P. 541-558.
3. Paidoussis, M. P. A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram // Journal of Sound and Vibration, 2005. — № 280. — P. 141-157.
4. Babakov, I. M. Theory of vibrations— Moscow: Nauka, 1968. — 560 p. (in Russian)
5. Vasilevskiy, Yu.E. Nonlinear model of pipeline dynamics with high-speed fluid flow // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2006. — № 4. — P. 322-334. (in Ukrainian)
6. Limarchenko, V.O. Dynamics of pipeline with liquid on a vibrating foundation // Physico-mathematical modelling and informational technologies, 2012. — № 15. — P. 40-48 (in Ukrainian)

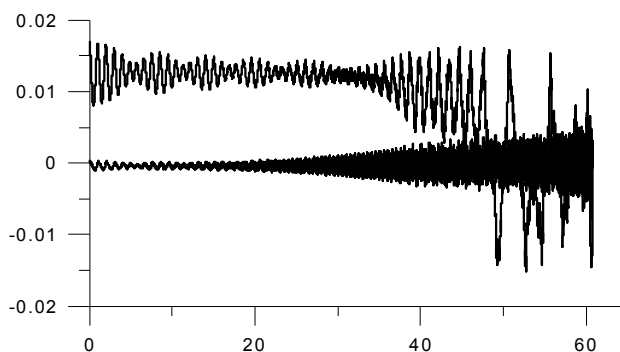


Рис. 5. Графік першої та другої форм коливань $V=15$ м/с; $A_x = 0,002$; $\omega_x = 80$; $c_1(0) = 0,017$

У всіх розглянутих випадках коливання мають чітку тенденцію до зростання амплітуди, що обумовлено надходженням енергії за рахунок неперервної подачі рідини по трубі. Збільшення амплітуди початкового збурення призводить лише до пришвидшення цього процесу.

Висновки

В роботі розглянуто задачу динаміки трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Розроблено модель руху такої системи для випадку заданого руху основи та сумісного руху основи та трубопроводу. Проаналізовано поведінку системи при збудженні руху за рахунок заданої поздовжньої вібрації основи трубопроводу. Показано, що поведінка системи може якісно змінюватись при малих змінах початкових умов. У випадку поздовжнього збурення за рахунок додаткового зміщення по першій формі перехід до альтернативного положення рівноваги може спостерігатися одразу з початкового моменту розвинення коливань.

Надійшла до редколегії 12.03.13