УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., ст.н.с.

Про близькість моделей динаміки Вольтера та Гудвіна

Розглянуто математичні моделі динаміки популяцій Вольтера. Спочатку наведено класичну модель взаємодії «хижак-жертва». Далі розглянуто модель з запізнюванням. Проведено дослідження якісної поведінки траєкторій руху.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання, стійкість.

Garkusha N.I, PhD

The proximity of models of the dynamics of Voltaire and Goodwin

The mathematical models of population dynamics of Voltaire are considered. At first the classic model of interaction "predator-prey" is presented. Next, consider the model with a delay. The research of qualitative behavior of trajectories was made.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay, stability.

E-mail: ngarkusha@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаінов Д. Я.

Вступ

Очевидно, однією з перших математичних моделей динаміки розвитку була модель Мальтуса [1]. Вона являла собою лінійне скалярне диференціальне рівняння з сталим коефіцієнтом

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t),\; x(0) = x_0 . \qquad (1)$$

Рівняння (1) мало одну особливу точку $x_1 = 0$, Розв'язком рівняння була експонента $x(t) = x_0 e^{\gamma t}$, яка зростала при додатному коефіцієнті народжуваності γ і спадала при від'ємному. Таким чином при $\gamma > 0$ популяція зростала до нескінченості (епідемія), при $\gamma < 0$ прямувала до нуля (вимирала). Природнью, що така модель могла реально описувати процес лише на невеликому проміжку часу і великого практичного застосування не знайшла.

Більш складною являла собою модель Ферхюльста [1]. Вона представляла собою рівняння з квадратичною правою частиною

Модель мала дві особливі точки $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha/\beta$. Асимптотично стійкою була точка $x_2 = \alpha/\beta$, а $x_1 = 0$ була нестійкою. Їз збільшенням часу $t \to +\infty$, популяция прямувала до стійкого стану рівноваги $x_2(t) \to \alpha/\beta$.

Для врахування розвитку різного виду популяцій була розроблена модель Лотки-Вольтера [2]. Модель, яка враховувала післядію на нескінченому проміжку часу, мала виглядд інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{N}_1(t) = \left[\alpha_1 - \int_{-\infty}^{t} F_1(t-s) N_2(s) ds\right] N_1(t),$$

$$\dot{N}_2(t) = -\left[\alpha_2 - \int_{-\infty}^{t} F_2(t-s) N_1(s) ds\right] N_2(t).$$

Більш проста модель мала вигляд системи двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{N}_1(t) = [\alpha_1 - \gamma_1 N_2(t)] N_1(t),$$

$$\dot{N}_2(t) = -[\alpha_2 - \beta_2 N_1(t)] N_2(t) \qquad (3)$$

з квадратичною правою частиною. Коефіцієнти $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,2}$, $\beta_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$ характеризували народжуваність та потребу в їжі. Розглядалась невід'ємна чверть площини, тобто $N_1 \ge 0$, $N_2 \ge 0$. Було доведено [2], що існують дві точки спокою: $N_1^0 = 0$, $N_2^0 = 0$ і $N_1^* = \alpha_1/\beta_2$, $N_2^* = \alpha_1/\gamma_1$. Нульовим станом рівноваги було сідло, ненульовим – цикл. Траєкторії системи, що розташовані в першому квадранті, мали вигляд замкнених циклів, рух по яким йшов навколо другої точки спокою. Ця модель обгрунтовувала періодичність динаміки колькісної залежності «хижаків» та «жертви». З ростом популяції «хижаків» популяція «жертви» зменшувалась. Це, в свою чергу вело до зменшення популяції «хижака» і к росту популяції «жертви».

Далі розглядались математические модели с квадратичной правой частью більш загального вигляду

$$\dot N_1(t)=[\alpha_1-\beta_1 N_1(t)-\gamma_1 N_2(t)]N_1(t),$$
$$\dot N_2(t)=-[\alpha_2-\beta_2 N_1(t)-\gamma_2 N_2(t)]N_1(t).$$

В цій статті розглядається математична модель Гудвіна, яка описує взаємодію виробничих пластів у суспільстві [3, стор.53]. Розлядаються два суспільних пласта: службовці та підприємці. Службовці витрачають свою зарплатню wL на прожиткові потреб, підприємці накопичують доходи $Y-wL$. Тут $Y-$продукція виробництва. Ціна товару пронормована. Нехай $K-$ капітал, $Y/L=a=a_0\exp\{gt\}$- продуктивність праці, що збільшується з сталою швидкістю g, $k=K/Y$- коєфіцієнт капиталоємність продукції,

$$N=N_0\exp\{nt\}$$

попит на рынку робочої сили, що збільшується з темпом росту n (або зменшується для від'ємного n). Доля витрат на оплату праці по відношенню до національного доходу складає $wL/Y=w/a$. Тому, доля прибутку підприємців складає $1-w/a$. Оскільки сбереження визначені як

$$S=Y-wL=(1-w/a)/k,$$

то доля інвестицій складає

$$dK/dt=S=(1-w/a)Y.$$

При сталому значенні капиталоємності k $Y\,dK/dt=K\,dY/dt$

мають місце співвідношення

$$Y^{-1}\,dY/dt-L^{-1}\,dL/dt=g$$

і

$$K^{-1}\,dK/dT=k^{-1}(1-w/a).$$

Звідси випливає, що

$$L^{-1}\,dL/dt=(1-w/a)/k-g.$$

Вводяться нові змінні $y=w/a$ - доля витрат на оплату труда, $x=L/N$ - коефіцієнт зайнятості. На підставі цього отримана система двух звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot x(t)=\left[\frac{1-y(t)}{k}-(g+n)\right]x(t),$$
$$\dot y(t)=\left[\frac{dw/dt}{w}-\frac{da/dt}{a}\right].$$

Линийна апроксимація

$$w^{-1}\,dw/dt=-r+bx$$

у другому рівнянні, приводить до співвідношення

$$y^{-1}\,dy/dt=-r+bx-g.$$

І модель Гудвіна взаимовідношень двух суспільних пластів, має вигляд

$$\dot x(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)-\frac{y(t)}{k}\right]x(t),$$
$$\dot y(t)=[-(g+r)+bx(t)]y(t). \tag{4}$$

Неважко побачити, що має місце близькість з моделлю Лотки-Вольтера «хижак-жертва». Позначивши

$$\alpha_1=\frac{1}{k}-(g+n),\ \gamma_1=\frac{1}{k},\ \alpha_2=g+r,\ \beta_2=b,$$

отримаємо, що при виконанні умови $1/k-(g+n)>0$, моделі співпадають. Таким чином, існує аналогія між явищами боротьби протидіючих біологічних суспільств і взаємовідносин «підприємець-службовець».

Динаміка моделі Гудвіна с післядією

Якщо враховувати час τ прийняття рішень (чася після отримання інформації і прийняття рішення), то більш адекватною математичною моделлю буде модель з післядією. Вона має вигляд

$$\dot x(t)=\left[\frac{1}{k}-(g+n)-\frac{y(t-\tau)}{k}\right]x(t),$$
$$\dot y(t)=[-(g+r)+bx(t-\tau)]y(t). \tag{5}$$

Стани рівноваги цієї системи ті ж самі, що і в системі без післядії: $x^0=0$, $y^0=0$ і

$x^* = (g+r)/b$, $y^* = 1-k(g+n)$. Нехай виконується умова

$$1-k(g+n)>0. \qquad (6)$$

Тоді друга особлива точка знаходиться в додатній чверті. Заміною змінних

$$x(t)=(g+r)/b+\xi(t),\ y(t)=1-k(g+n)+\eta(t) \qquad (7)$$

система (5) зводиться до вигляду «системи рівнянь збурень» у другій особливій точці. Вона буде мати вигляд

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{1}{k}\left[\frac{g+r}{b}+\xi(t)\right]\eta(t-\tau),$$
$$\dot{\eta}(t)=b[1+k(g+n)+\eta(t)]\xi(t-\tau).$$

Система лінійного наближення для другої особливої точки має вигляд

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{g+r}{kb}\eta(t-\tau),$$
$$\dot{\eta}(t)=b[1+k(g+n)]\xi(t-\tau).$$

Її характеристичним рівнянням буде

$$\det\begin{vmatrix} -\lambda & -e^{-\lambda\tau}\dfrac{g+r}{kb} \\ be^{-\lambda\tau}[1+k(g+n)] & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Або

$$\lambda^2+\frac{1}{k}(g+r)[1+k(g+n)]e^{-2\lambda\tau}=0.$$

Позначивши

$$\frac{1}{k}(g+r)[1+k(g+n)]=\omega^2,$$

отримаємо, що характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2+\omega^2 e^{-2\lambda\tau}=0. \qquad (8)$$

Його можна записати у формі

$$\left(\lambda+i\omega e^{-\lambda\tau}\right)\left(\lambda-i\omega e^{-\lambda\tau}\right)=0$$

і розщепити на два окремих рівняння

$$\lambda+i\omega e^{-\lambda\tau}=0,\quad \lambda-i\omega e^{-\lambda\tau}=0.$$

1. Розглянемо перше рівняння

$$\lambda+i\omega e^{-\lambda\tau}=0. \qquad (9)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $\lambda = x+iy$. Після підстановки отримаємо

$$x+iy+i\omega e^{-(x+iy)\tau}=0.$$

Звідси маємо

$$x+iy+i\omega e^{-x\tau}(\cos y\tau - i\sin y\tau)=0.$$

І отримаємо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими

$$x+\omega e^{-x\tau}\sin y\tau=0,\ y+\omega e^{-x\tau}\cos y\tau=0. \qquad (10)$$

Наведемо ряд тверджень про розташування коренів рівнянь.

1. Рівняння (9) має злічену кількість коренів.

2. Якщо виконується умова $\omega=(-1)^k k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, то рівняння (9) має розв'язок $\lambda_0 = ik\pi/\tau$. Дійсно, нехай існує чисто уявний корень $\lambda_{1,2}=iy_0$, $x_0=0$. Тоді система (10) переходит до

$$\omega\sin y_0\tau=0,\ y_0+\omega\cos y_0\tau=0.$$

З першого рівняння отримуємо $y_0\tau=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$. Друге рівняння перетворюється в

$$k\pi+(-1)^k\omega=0.$$

І при $\omega=(-1)^k k\pi$ рівняння (9) має розв'язок

$$y_0=k\pi/\tau.$$

3. Покажемо, що існує хоча б один корень с додатною дійсною частиною, тобто $\lambda_0=x_0+iy_0$, $x_0>0$. Розділивши одне з рівнянь (10) на друге, отримуємо

$$\frac{x}{y}=tgx\tau \ \rightarrow\ y=xctgx.$$

Звівши до квадрату і склавши, отримуємо

$$x^2+y^2=\omega^2 e^{2y\tau}.$$

Розглянемо отриману систему

$$y=xctgx,\ x^2+y^2=\omega^2e^{2y\tau}. \qquad (11)$$

Перша крива системи являє собою симетричну систему «деформованих» кривих, схожих на тангенси. Друга крива являє собою симетричну відносно змінної y криву, що прямує на нескінченість. І завжди існує перетин (x_0, y_0) кривих (11), який задовольняє уиові $x_0>0$, тобто стан рівноваги є нестійким.

Далі, розглянемо модель, яка враховує взаємодію. Вона має вигляд

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{1}{k} - (g+n) + R_1 x(t-\tau) - \frac{y(t-\tau)}{k}\right] x(t),$$
$$\dot{y}(t) = \left[-(g+r) + bx(t-\tau) + R_2 y(t-\tau)\right] y(t). \tag{12}$$

В цій моделі сталі R_1, R_2 враховують взаємний вплив змінних. Особливі точки визначаються розв'язком системи

$$\left[\frac{1}{k} - (g+n) + R_1 x - \frac{1}{k} y\right] x = 0,$$
$$\left[-(g+r) + bx + R_2 y\right] y = 0.$$

Система має чотири особливі точки:

$$O_1(0{,}0),\ O_2\left(0, \frac{g+r}{R_2}\right),\ O_3\left(\frac{1-(g+n)}{R_1 k}, 0\right),$$
$$O_4(x_4, y_4)$$

де

$$x_4 = \frac{R_2\left[\frac{1}{k} - (g+n)\right] + \frac{1}{k}(g+r)}{R_1 R_2 + \frac{b}{k}},$$
$$y_4 = \frac{R_1(g+r) - b\left[\frac{1}{k} - (g+n)\right]}{R_1 R_2 + \frac{b}{k}}. \tag{13}$$

Актуальною є точка $O_4(x_4, y_4)$. Лінеаризація в околі цієї точки дає наступну систему

$$\dot{x}(t) = a_{11} x(t) + b_{11} x(t-\tau) + b_{12} y(t-\tau)$$
$$\dot{y}(t) = a_{22} y(t) + b_{21} x(t-\tau) + b_{22} y(t-\tau),$$

де

$$a_{11} = \left[\frac{1}{k} - (g+n) + R_1 x_4 - \frac{1}{k} y_4\right],$$
$$a_{22} = \left[-(g+r) + b x_4 + R_2 y_4\right]$$

$$b_{11} = R_1 x_4,\ b_{12} = -\frac{1}{k} x_4,\ b_{21} = y_4,\ b_{22} = R_2 y_4, \tag{14}$$

Відомо, що необхідною умовою стійкості системи з запізнюванням є асимптотична стійкість системи без запізнювання [4]. Характеристичне рівняння системи без запізнювання має вигляд

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} + b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - \left[(a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22})\right]\lambda +$$
$$+ \left[(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - b_{12} b_{21}\right] = 0$$

Для рівняння другого порядку необхідною та достатньою умовою стійкості стану рівноваги є додатність коефіцієнтів, тобто

$$(a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) > 0,$$
$$(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - b_{12} b_{21} > 0. \tag{15}$$

Таким чином, якщо виконується нерівність (15) зі змінними, що визначені в (14), то стан рівноваги $O_4(x_4, y_4)$ асимптотично стійкий при достатньо малому запізнюванні.

Це означає, що встановлюється динамічна рівновага у взаємовідносинах між підприємцями та службовцями.

Список використаної літератури

1. Smith J. Models in ecology. - M., Mir, 1976. - 184 p.
2. Volterra V. The mathematical theory of the struggle for existence. - M., Nauka, 1976. - 286 p.
3. Zang V.V. Synergetic Economics. Time and changes in the nonlinear economictheory. M., Mir, 1999. - 335 p.
4. Elsgoltz L. E. and Norkin S.B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. Nauka 1970. - 240 p.

Подано до редколегії 19.03.2013