УДК 519.7

Кійковська О.І. [1], аспірантка
Чабанюк Я.М. [2], д.ф.-м.н., проф.

Процедура стохастичної апроксимації в схемі дифузійної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу

В даній роботі встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням у випадку марковських переключень в схемі дифузійної апроксимації в умовах локального балансу. Умови сформульовано в термінах властивостей функції Ляпунова усередненої системи.

Ключові слова: процедура стохастичної апроксимації, марковський процес, імпульсне збурення, функція Ляпунова, умова локального балансу.

[1] Національний університет “Львівська політехніка”, 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: olja.kiykovska@gmail.com
[2] Національний університет “Львівська політехніка”, 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

O. I. Kiykovska[1], postgraduate student,
Ya.M. Chabanyuk[2], Ph.D.

Stochastic approximation procedure in diffusion approximation scheme with impulse perturbation under the condition of local balance

In this paper it has been established sufficient conditions for the stochastic approximation procedure with impulse perturbation in diffusion approximation scheme under the condition of local balance using the Lyapunov function conditions for average system.

Key Words: stochastic approximation procedure, Markov process, impulse perturbation, Lyapunov function, condition of local balance.

[1] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: olja.kiykovska@gmail.com,

[2] Lviv Politechnic National University, 79013, Lviv, S. Bandera str., 12,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В. В.

Вступ

Асимптотичні властивості імпульсних процесів досліджено в [1] з використанням малого параметру в умовах глобального балансу. Флуктуації випадкової еволюції з усередненою точкою рівноваги присвячена робота [2]. Збіжність неперервної процедури стохастичної апроксимації (ПСА)

$$du(t) = a(t)[C(u(t))dt + \sigma(t,u(t))d\zeta(t)], u(0) = u_0$$

встановлено у [3] через властивості функції Ляпунова. У [4] досліджено ПСА з дифузійним збуренням та марковськими переключеннями.

В даній роботі розглянуто неперервну ПСА з імпульсним збуренням в умовах локального балансу в схемі дифузійної апроксимації. Встановлено достатні умови збіжності такої процедури в марковському середовищі через властивості функції Ляпунова усередненої системи.

1. Постановка задачі

Неперервна процедура стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням в ергодичному марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації [1] визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^\varepsilon(t)],$$
$$u^\varepsilon(0) = u_0 \qquad (1)$$

де $C(u;x), u \in R^d$ - функція регресії , $u^\varepsilon(t), t \ge 0$ - випадкова еволюція, а ε - малий параметр серій. Друга компонента функції регресії описує вплив зовнішніх факторів, які задаються рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t), t \ge 0$ у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ [5]. Марковський процес задається генератором

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \quad \varphi \in \quad (X),$$

де $\quad (X)$ - банаховий простір дійснозначних обмежених функцій з супремум – нормою

$$\|\varphi\| := \max_{x \in X} |\varphi(x)|,$$

а $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X},$ - стохастичне ядро [5], $q(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, θ_x- час перебування марковського процесу в стані x.

Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X},$ марковського процесу $x(t), t \ge 0$, визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \, q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

де $\rho(B), B \in \boldsymbol{X},$ - стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова [6] $x_n = x(\tau_n), n \ge 0$, і τ_n - моменти стрибків марковського процесу $x(t), t \ge 0$.

Для генератора $\boldsymbol{Q}$ марковського поцесу $x(t), t \ge 0,$ потенціал R_0 має представлення

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$, - проектор на нуль-простір оператора $\boldsymbol{Q}$: $N_Q = \{\varphi \in \quad (X): \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}$ [1].

Імпульсний процес збурень $\eta^{\varepsilon}(t), t \ge 0$ в схемі дифузійної апроксимації задається співвідношенням $\eta^{\varepsilon}(t) := \varepsilon\eta(t/\varepsilon^2)$, де

$$\eta(t) = \int_0^t \eta(ds; x(s)),$$

а сімейство процесів з локально незалежними приростами $\eta(t;x), t \ge 0, x \in X$ задається генераторами

$$\boldsymbol{\Gamma}(x)\varphi(w) = \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(u;dv;x),$$

$u \in R^d, x \in X$. Отже, процес $\eta^{\varepsilon}(t), t \ge 0$ визначається генератором [7]

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{R^d} [\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)]\Gamma(u;dv;x). \quad (2)$$

2. Збіжність процедури стохастичної апроксимації

Нехай виконується умова локального балансу

$$b(u;x) := \int_{R^d} v\Gamma(u;dv;x) \equiv 0. \qquad (3)$$

Усереднена функція регресії визначається співвідношенням [8]:

$$C(u) = \int_X \pi(dx) C(u;x).$$

Теорема . *Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$, для усередненої динамічної системи*

$$du(t) = C(u(t))dt,$$

що забезпечує умову експоненційної стійкості
$C1: \; C(u)V'(u) < -cV(u), c > 0,$
та задовольняє додатковим умовам:
$C2: \; | \quad (x)V(u)| \le c_1(1 + V(u)), c_1 > 0$,
$C3: \; |\delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)V(u)| \le c_2(1 + V(u)), c_2 > 0$,
$C4: \; | \quad (x)R_0 \widetilde{\quad}(x)V(u)| \le c_3(1 + V(u)), c_3 > 0$,
$C5: \; | \quad (x)R_0 \widetilde{\quad}(x)V(u)| \le c_4(1 + V(u)), c_4 > 0$,
$C6: \; |\delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)R_0 \widetilde{\quad}(x)V(u)| \le c_5(1 + V(u)), c_5 > 0$,
де $\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) = [\boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{L}]V(u)$,
$\boldsymbol{L}V(u) = \Pi C(u,x)V'(u),$
$\quad (x)\varphi(u;x) = B(u;x)\varphi_u''(u;x),$
а $\|\delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u)\| \to 0,$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Нехай виконується умова балансу (3) і нормуюча функція $a(t) > 0$ задовольняє умовам:

$$\int_0^{\infty} a(t)dt = \infty, \int_0^{\infty} a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді, для кожного початкового значення $u^{\varepsilon}(0) = u_0 \in R^d$, розв'язок рівняння (1) при будь-якому $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^*, що однозначно визначається рівнянням $C(u^*) = 0$:

$$\{\lim_{t \to \infty} u^{\varepsilon}(t) = u^*\} = 1.$$

Зауваження 1. Добутки типу $B(u;x)V''(u)$ мають представлення [1, с.10]

$$B(u;x)V''(u) = \sum_{i,j=1}^{d} b_{i,j}(u;x) \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} V(u).$$

Зауваження 2. У випадку, коли функція $C(u;x)$ - лінійна, а $V(u)$ - квадратична форма виконуються умови $C2 - C6$ теореми.

Лема 1. *Генератор двокомпонентного марковського процесу*

$$u^{\varepsilon}(t) := u_t^{\varepsilon}, x(t/\varepsilon^2) := x_t^{\varepsilon}, t \geq 0, \tag{4}$$

в банаховому просторі (R^d, X) *дійснозначних обмежених функцій* $\varphi(u;x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ *має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x) +$$
$$+ a(t)C(x)\varphi(u;x) + \varepsilon a(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x), \tag{5}$$

де $\boldsymbol{C}(x)\varphi(u;x) = C(u;x)\varphi'(u;x)$.

Доведення. Генератор марковського процесу (4) на тест-функціях $\varphi(u;x)$, визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x) =$$
$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) \,|\, u_t^{\varepsilon} = u, x_t^{\varepsilon} = x] - \varphi(u;x)]. \tag{6}$$

Використовуючи позначення

$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] := E[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) \,|\, u_t^{\varepsilon} = u, x_t^{\varepsilon} = x]$

для умовного математичного сподівання, представимо праву частину (6) у вигляді

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u;x)] =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] +$$
$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u;x)]. \tag{7}$$

Зауважимо, що останній доданок в (7) має представлення [2]

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u;x)] = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x). \tag{8}$$

Враховуючи те, що з (1) отримуємо

$$u_{t+\Delta}^{\varepsilon} = u + a(t)C(u;x)\Delta + a(t)\Delta\eta^{\varepsilon}(t) + o(\Delta),$$

для математичного сподівання з першого доданку (7) маємо

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u, x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] =$$
$$= E_{u,x}[\varphi(u + a(t)C(u;x)\Delta + a(t)\Delta\eta^{\varepsilon}(t) + o(\Delta); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) -$$
$$- \varphi(u; x_{t+\Delta})].$$

Додавши та віднявши у математичному сподіванні вираз $\varphi(v, x_{t+\Delta}^{\varepsilon})$, де $v = u + a(t)C(u;x)\Delta + o(\Delta)$, отримуємо

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u, x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] =$$
$$= E_{u,x}[\varphi(v + a(t)\Delta\eta^{\varepsilon}(t); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(v; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] +$$
$$+ E_{u,x}[\varphi(v; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})].$$

Враховуючи означення генератора $\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + \Delta\eta^{\varepsilon}(t); x) - \varphi(u;x)],$$

та те, що $v \to u$ при $\Delta \to 0$, отримуємо для першого доданку з (7) представлення

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] =$$
$$= a(t)\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) +$$
$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(v; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u; x_{t+\Delta})].$$

Оскільки для останньої границі з попереднього представлення мають місце перетворення

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(v; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi_u'(u; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})a(t)C(u;x)\Delta + o(\Delta))] = \quad (9)$$
$$= a(t)C(u;x)\varphi_u'(u;x),$$

то разом з (8), отримуємо (5).

Лема 2. *Генератор (5) в умовах локального балансу (3) допускає асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x) =$$
$$= \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x) + a(t)\boldsymbol{C}(x)\varphi(u;x) + \varepsilon a(t)\gamma^{\varepsilon}(x), \tag{9}$$

де $\gamma^{\varepsilon}(x) = (1/2)\quad (x)\varphi(u;x) + \delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u)$,

$(x)\varphi(u;x) = B(u;x)\varphi_u''(u;x)$, *і* $\left\|\delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u)\right\| \to 0$, *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Оскільки генератор (2) в умовах (3) допускає представлення [7]

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (1/2)B(u;x)\varphi''(u) + \delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u),$$

де $\delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u)$ - знехтуючий член, такий, що $\left\|\delta_{\Gamma}^{\varepsilon}(u;x)\varphi(u)\right\| \to 0$, при $\varepsilon \to 0, \varphi(u) \in C^3(R^d)$, то з (5) отримуємо (9).

Лема 3. *На збуреній функції Ляпунова*

$$V^{\varepsilon}(u;x) = V(u) + \varepsilon^2 a(t)V_1(u;x), \tag{10}$$

розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (9) реалізується співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)V^{\varepsilon}(u;x) = a(t)\boldsymbol{L}V(u) + \varepsilon\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{11}$$

де $\boldsymbol{L}V(u) = \Pi\boldsymbol{C}(x)V(u) = \Pi C(u;x)V'(u)$, *а залишковий член* $\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u)$ *допускає оцінку в умовах теореми*

$$|\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u)| \leq ca^2(t)(1 + V(u)). \tag{12}$$

Доведення. Встановимо дію оператора $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)$ на збуреній функції Ляпунова (10).

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)V^{\varepsilon}(u;x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}V(u) +$$
$$+a(t)[\boldsymbol{Q}V_1(u;x)+\boldsymbol{C}(x)V(u)]+\varepsilon[a(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V(u)+$$
$$+\varepsilon a^2(t)\boldsymbol{C}(x)V_1(u;x)+\varepsilon^2 a^2(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V_1(u;x)].$$

Оскільки $V(u)$ не залежиить від x, тобто $V(u)\in N_Q$, отже $\boldsymbol{Q}V(u)=0$. З умови розв'язності рівняння

$$a(t)[\boldsymbol{Q}V_1(u;x)+\boldsymbol{C}(x)V(u)] = a(t)\boldsymbol{L}(u)$$

отримуємо вигляд граничного оператора

$$\boldsymbol{L}V(u) = \Pi\boldsymbol{C}(x)V(u) = \Pi C(u,x)V'(u).$$

Отже з використанням цієї умови, розв'язок рівняння набуде вигляду:

$$V_1(u,x) = [a(t)]^{-1}R_0\left[a(t)\boldsymbol{C}(x)-a(t)\boldsymbol{L}\right]V(u) =$$
$$= R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u),$$

де $\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) = \boldsymbol{C}(x)-\boldsymbol{L}$.

Встановимо оцінку залишкового члена представлення (11), врахувавши його аналітичний вигляд

$$\theta_t^{\varepsilon}(x) = a(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V(u) +$$
$$+\varepsilon a^2(t)\boldsymbol{C}(x)V_1(u;x)+\varepsilon^2 a^2(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V_1(u;x). \qquad (13)$$

З гладкості функції Ляпунова $V(u)$, умов $C2, C3$ теореми маємо

$$|\, a(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V(u)\,| \le (c_1+c_2)a^2(t)(1+V(u)).$$

Використавши умову $C4$ для оцінки другого доданку (13), отримуємо

$$|\, a^2(t)\boldsymbol{C}(x)V_1(u;x)\,| \le c_3 a^2(t)(1+V(u)).$$

Для тетього доданку (13) з умов $C5, C6$ теореми, маємо

$$|\, a^2(t)\gamma^{\varepsilon}(x)V_1(u;x)\,| \le (c_4+c_5)a^2(t)(1+V(u)).$$

Таким чином для залишкового члена $\theta_t^{\varepsilon}(x)V(u)$ має місце сумарна оцінка (12).

3. Завершення доведення теореми.

Використовуючи умову $C1$ теореми одержимо оцінку для граничного генератора $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L}V(u) \le -cV(u).$$

З умови $C1$ теореми та нерівності (12) одержимо нерівність:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}(x)V_t^{\varepsilon}(u,x) \le -ca(t)V(u) + c^* a^2(t)(1+V(u)). \quad (14)$$

Збіжність процедури стохастичної апроксимації випливає з нерівності (14) та теореми Невельсона-Хасьмінського [3].

Висновки

Встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу до точки рівноваги функції регресії в термінах властивостей функції Ляпунова. Отримані результати дозволяють дослідити збіжність процедури стохастичної оптимізації та її модифікацій з врахуванням марковських та імпульсних впливів на функцію регресії в умовах локального балансу.

Література

1. *Korolyuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific, 2005. – 330 p.

2. *Chabaniuk Y., Koroliuk V.S., Limnois N.* Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point // C.R.Acad.Sci.Ser.I.Paris, 2007. – P.405 – 410.

3. *Nevelson M.B., Hasminskyy R.Z.* Stochastic Approximation and Recurent Evaluation. – Moscow: Nauka, 1972. – 304 p. (in Russian).

4. *Kiykovska O.I.* Converges of stochastic approximation procedure with diffusion perturbation // Kamyanets - Podilsky National University of Ivan Ogienko, 2012. — No. 7. — P. 109 – 117. (in Ukrainian).

5. *Korolyuk V.S.* Stochastic Models of Systems. – K: Lybid, 1993. – 136 p. (in Ukrainian).

6. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 185p.

7. *Koroliuk V.S.* Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 179, No. 2, November, 2011. – P. 273 – 289.

8. *Kiykovska O.I., Chabanyuk Ya.M.* Converges of stochastic approximation procedure in asymptotically small diffusion scheme // Journal of Chernivtsi National University, 2012. – T.2 no.2-3 – P. 90 – 95. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 12.03.2013