УДК 519.8

Кондрук Н.Е., к.т.н.

Метод визначення кількісної міри переваги в колективному порядку

Пропонується метод визначення кількісної міри переваги кандидатів в колективному порядку, що побудований на основі методів голосування із використанням теорії нечітких множин

Ключові слова: методи голосування, колективний порядок, кандидати голосування.

Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46, e-mail: kondrukne@gmail.com

N. E. Kondruk, Ph.D. (Technical sciences)

A method for determining the quantitative measure of advantage of collective order

A method for determining the quantitative measure of candidates advantage of collective order based on the methods of voting & theory of fuzzy sets is proposed

Key Words: methods of voting, collective order, candidates voting.

National University of Uzhgorod, 88000, Uzhgorod, Pidgirna str., 46, e-mail: kondrukne@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ

В наші дні більшість суспільних рішень приймається на основі голосування. Голосуванням вибираються президенти, депутати, приймаються закони. Таким чином, найбільш розповсюдженим способом прийняття колективного рішення є голосування, що, в свою чергу, і визначає актуальність вибраної теми дослідження.

Хоча практика голосування становить тисячі років, фактичне їх вивчення почалось близько 200 років тому в роботах Борда та Кондорсе[1-3].

Принцип, що лежить в основі методу Кондорсе полягає в наступному: кандидат, який виграє в попарних порівняннях з усіма іншими кандидатами є переможцем на виборах. Принцип Кондорсе пропонувався як раціональний та демократичний. Однак невдовзі було виявлено «парадокси», зокрема відсутності переможця, нетранзитивності цього методу голосування тощо [4]. Узагальненими правилами типу Кондорсе є правила Компленда та Сімпсона. При цьому, якщо існує переможець Кондорсе, то він буде переможцем і Компленда, і Сімпсона, крім того, на відміну від правила Кондорсе, дані методи завжди визначають переможця [1].

Згідно методу Борда, результати голосування виражаються у вигляді кількості очок, які набрані кожним із кандидатів. Для цього, на думку Борда, кожний виборець має впорядкувати по перевазі всіх кандидатів, що включені в бюлетень, приписати їм рангові місця із спадаючими вагами, тобто приписати ранг 0 найгіршому, 1 – наступному по перевазі і т.д. Колективний вибір Борда запропонував визначати не за кількістю отриманих голосів, а за сумою рангових місць, які приписані кандидату всіма виборцями [1-3].

В середині 20-го століття були винайдені багато десятків процедур голосування, але дослідження Борда та Кондорсе залишились неперевершеними взірцями. І лише в 1951 році американський вчений К.Ерроу запропонував формальну модель колективного прийняття рішень, яка дозволила їх досліджувати з аксіоматичної точки зору [4].

За останні роки багатьма вченими вивчались парадокси голосування, будувались нові способи «розумних» процедур голосування, але опубліковані до цього часу результати показують, що ні одна із відомих процедур голосування не задовольняє більшості введеним критеріям (аксіомам), і при виборі процедури голосування виникає та ж проблема, з якою на початку зустрічається дослідник в багато-критеріальній оптимізації.

Незалежно від вибраного правила голосування перемога кандидата з розривом в 99 % голосів більш переконлива, чим перемога з розривом в 1 % голосів виборців; «абсолютна» (100 %) ж перемога є беззаперечною.

© Н. Е. Кондрук, 2013

Дане дослідження і є направленим на розв'язання вищеозначеної проблеми – визначення кількісної міри переваги кандидатів в колективному порядку, тобто визначення «якості» отриманої перемоги.

Постановка задачі

Нехай розв'язок «задачі голосування» записується у вигляді колективного порядку строгим ранжуванням. У випадку рівноправності кандидатів (у випадку переваг $a \succ b$ (одного виборця) і $b \succ a$ (в іншого), звичайно, буде $a = b$ (кандидати a і b «ділять» місце)) можна, наприклад, скористатись наперед встановленим правилом вибору (зокрема і лексикографічним).

Існують два підходи побудови колективного порядку.

Суть першого підходу полягає в наступному: на множині індивідуальних ранжувань задається відстань і колективний порядок визначається як таке ранжування, відстань якого до індивідуальних ранжувань за певним критерієм (наприклад, Кемені-Снелла) мінімальна [5,6].

Другий підхід заснований на тому, що переможець виключається з профілю, в отриманому профілі знову визначається переможець, який займає друге місце в колективному порядку і т.д., тобто маємо деякий покроковий процес виключення, де кількість кроків на одиницю менше кількості кандидатів. Наприклад, у вигляді послідовності переваги кандидатів: $a \succ b \succ c \succ d$, де кандидат a – переможець в множині кандидатів $\{a, b, c, d\}$, b – переможець в множині $\{b, c, d\}$ і т.д. [1,2].

Ставиться задача визначення кількісної міри переваги кожного кандидата-переможця над кандидатами у відповідній йому множині в залежності від колективного порядку.

Для розв'язання поставленої задачі будуть використані терміни і методи теорії нечітких множин, згідно яких мірою належності деякого елемента до такої множини визначається числом із одиничного відрізку $[0, 1]$. Тобто нечітка множина C на деякій універсальній множині X, являє собою множину пар $\{(x, \mu_C(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_C : X \to [0, 1]$. Значення μ_C для конкретного значення x називається мірою належності цього елементу множині C [7].

Нехай $X = \{x_1, \ldots, x_P\}$ – множина всіх кандидатів, P – загальна кількість кандидатів деякого голосування. В якості універсальної множини X доцільно взяти множину всіх кандидатів, але оскільки вона змінюватиметься відповідно до профілю голосування при виключенні переможця на кожному кроці побудови колективного порядку, то будемо розглядати не одну множину X, а їх послідовність $X_i \subset X_{i+1}$, $X_1 = X$, $i = \overline{1, P-1}$, де кожна наступна множина X_i не буде містити переможця попереднього кроку.

Під терміном «абсолютний переможець» будемо розуміти кандидата, за якого проголосували всі виборці, тобто він займає перше місце в індивідуальних порядках всіх виборців.

Опишемо нечіткі множини C_i ={кандидат x – «абсолютний переможець» в множині кандидатів X_i}, де $x \in X_i \subset X$, $i = \overline{1, P-1}$. Тобто нечітка множина C_i буде визначатись парами $(x, \mu_{C_i}(x))$, де x є кандидатом множини X_i, а величина $\mu_{C_i}(x)$ – міра «близькості» даного кандидата до абсолютного переможця в кожній множині X_i, $i = \overline{1, P-1}$. на кожному кроці побудови колективного порядку буде відповідати своя нечітка множина C_i.

Розв'язок поставленої задачі будемо шукати, використовуючи процедуру побудови функції належності $\mu_{C_i}(x)$ кандидатів $x \in X_i$ до нечітких множин C_i для кожного кроку $i = \overline{1, P-1}$ визначення колективного порядку.

Загальний алгоритм розв'язання поставленої задачі

Розглянемо загальну процедуру визначення кількісної міри переваги кандидатів в колективному порядку μ^i, $i = \overline{1, P-1}$.Для цього припустимо, що деяким способом вже побудовані функції належності $\mu_{C_i}(x)$ кандидатів $x \in X_i$ нечітким множинам C_i.

Крок 1. Для множини кандидатів $X_1 = X$ знаходимо $\mu^1 = \max\limits_{x \in X_1} \mu_{C_1}(x)$. Позначимо x^1

кандидата, якому відповідає знайдене значення μ^1, а $\tilde{\mu}^1 = \dfrac{\mu^1}{\sum_{x \in X_1} \mu_{C_1}(x)}$.

Крок 2. Для множини $X_2 = X_1 / \{x^1\}$ знаходимо значення $\mu^2 = \max_{x \in X_2} \mu_{C_2}(x)$ і відповідного йому кандидата x^2, $\tilde{\mu}^2 = \dfrac{\mu^2}{\sum_{x \in X_2} \mu_{C_2}(x)}$.

Крок i. Знаходимо значення $\mu^i = \max_{x \in X_i} \mu_{C_i}(x)$, де $X_i = X_{i-1} / \{x^{i-1}\}$ і фіксуємо відповідного кандидата x^i, де $\tilde{\mu}^i = \dfrac{\mu^i}{\sum_{x \in X_i} \mu_{C_i}(x)}$.

Значення $\tilde{\mu}^i$ будемо називати відносною мірою переваги кандидата x^i над іншими кандидатами множини X_i.

Після пророблених $P-1$ ітерацій нормуємо значення: $\mu^i = \dfrac{\tilde{\mu}^i}{\sum_{i=1}^{P-1} \tilde{\mu}^i}, i = \overline{1, P-1}$.

Отримані значення μ^i, $i = \overline{1, P-1}$, і будуть визначати відносну міру переваги кандидатів-переможців в колективному порядку.

Таким чином, розв'язання поставленої задачі представляється в наступному вигляді: $x^1 \overset{\mu^1}{\succ} x^2 \overset{\mu^2}{\succ} x^3 \overset{\mu^3}{\succ} \cdots$, що означає, що μ^1 – відносна міра переваги кандидата x^1 відносно інших $P-1$ кандидатів, які знаходяться «лівіше» в знайденому колективному порядку, μ^2 – міра переваги кандидата x^2 відносно кандидатів із множини $X / \{x^1, x^2\}$), μ^3 – міра переваги кандидата x_3 по відношенню до кандидатів множини $X / \{x^1, x^2, x^3\}$ і т.д.

Очевидно, що побудований алгоритм для знаходження значень μ^i, $i = \overline{1, P-1}$, передбачає виконання умови нормування: $\sum_{i=1}^{P-1} \mu_i = 1$.

Побудова функцій належності для деяких правил голосування

Як відомо, класичні методи голосування можна умовно поділити на ті, що засновані на підрахунку очок і методи типу Кондорсе.

До методів підрахунку очок відносяться методи відносної більшості, метод альтернативних голосів, метод Борда та ін.

Розглянемо побудову функцій належності $\mu_{C_i}(x)$ для цього класу методів голосування на прикладах методів голосування відносної більшості та Борда.

Для методу відносної більшості функції $\mu_{C_i}(x)$ визначаються як відношення кількості голосів виборців, отриманих визначеним кандидатом x на i-му кроці до кількості всіх виборців голосування: $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{n_x^i}{M}$, де $x \in X_i$, $i = \overline{1, P-1}$, n_x^i – кількість голосів отриманих кандидатом x на i-му кроці, M – загальна кількість виборців. Вибір цієї залежності визначається тим, що «абсолютний переможець» i-го кроку колективного порядку за даним правилом буде мати M очок.

Для методу Борда кількість очок, набрана «абсолютним переможцем» i-го кроку буде рівна величині $\alpha_i = M(P - (i-2))$. Таким чином, функція належності кандидата $x \in X_i$ до нечіткої множини C_i, що визначає міру його «близькості» до «абсолютного переможця» i-го кроку буде мати наступний вигляд: $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{B_x^i}{M \cdot \alpha_i}$, де $x \in X_i$, $i = \overline{1, P-1}$, B_x^i- загальна кількість очок кандидата x, підрахована за правилом Борда на i-му кроці.

Розглянемо побудову функцій належності $\mu_{C_i}(x)$ для методів Сімпсона та Компленда, які є методами типу Кондорсе.

Функцію належності кандидата $x \in X_i$ нечіткій множині C_i для методу Сімпсона, можна визначити як: $\mu_{C_i}(x) = \dfrac{S^i(x)}{M}$, де $S^i(x)$ – оцінка Сімпсона для кандидата $x \in X_i$ на i-му кроці побудови колективного порядку, M – загальна кількість виборців (оцінка для «абсолютного переможця» за Сімпсоном буде рівна M). Нагадаємо, що оцінкою Сімпсона для кандидата $x \in X_i$ називається число $S^i(x) = \min_{x \neq z, z \in X_i} S^i(x,z)$, причому $S^i(x,z)$ – кількість голосів виборців, для яких кандидат x переважніше кандидата z .

Оцінкою Компленда для кандидата $x \in X_i$ називається число $K^i(x) = \sum_{z \in X_i, x \neq z} K(x,z)$, де

$$K(x,z) = \begin{cases} 1, \ x \succ z \\ 0, \ x = z \\ -1, \ z \succ x \end{cases}.$$

Таким чином, оцінка Компленда «абсолютного переможця» множини кандидатів X_i, $i = \overline{1, P-1}$, рівна $\beta_i = P - i$. Тоді функцію належності кандидата $x \in X_i$ нечіткій множині C_i для методу Компленда, можна визначити як

$$\mu_{C_i}(x) = \frac{\beta_i + K^i(x)}{2 \cdot \beta_i}.$$

Обчислювальний експеримент

Для проведення експериментального дослідження запропонованого методу був розроблений в середовищі Delphi 6.0 програмний комплекс, що дозволяє розв'язувати задачі визначення не тільки колективного порядку за методами Сімпсона, Компленда, Борда та відносної більшості, а й визначати кількісну міру переваги кандидатів голосування в колективному порядку. При цьому розроблено простий та зручний інтерфейс для користувача. Передбачена можливість зберегти отримані результати роботи програмного забезпечення в текстовий файл.

Під час обчислювального експерименту було розв'язано ряд реальних задач (вибір старости групи, кращого викладача факультету, представника групи для виступу на конференцію, тощо) голосування в яких брали участь від 14 до 20 виборців та 3-5 кандидатів.

Дане дослідження показало ефективність використання представленого методу для розв'язання практичних задач голосування.

Висновки

Таким чином, в даній роботі поставлено задачу визначення кількісної міри переваги кандидатів колективного порядку; розроблено метод розв'язання поставленої проблеми для різних методів голосування, який заснований на теорії нечітких множин; представлено його конкретизацію для методів голосування Компленда, Сімпсона, відносної більшості та Борда.

Список використаних джерел

1. *Voloshin O.F.* Models and methods of making decision: a train aid is for the students of higher educational establishments / second edition / O.F. Voloshin, S.O. Maschenko – Kiev: Publisher center the «Kiev university», 2010. – 336 p. (in Ukrainian)
2. *Voloshin O.F.* Methodical recommendations to implementation of practical and laboratory works from the decision making theory / O.F. Voloshin, S.O. Maschenko : Kiev, 2001. – 46 p. (in Ukrainian)
3. *Larichev O.I.* Theory and methods of making decision and also Chronicle of events in the Magic countries: Textbook. A publ. is second / O.I. Larichev – M.: Logos, 2002. – 392 p. (in Russian)
4. *Zarichniy M. M.* Elements of the social choice theory / Zarichniy M., Dzyubko I. : Lviv, 2001. – 160 p. (in Russian)
5. *Antosyak P.P.* Localization of change intervals of objects optimum grades in the task Kemeni-Snella median finding / P.P. Antosyak // Announcer of the Kiev national university of the Tarasa Shevchenko name. Series: Cybernetics, 2008. – №8. – P. 4–7. (in Ukrainian)
6. *Voloshin A.F.* The collective social-meaningful decisions making problems / A.F. Voloshin, P.P. Antosyak of // Trudy XII-th international conference «Knowledge-dialog-decision», V. 1, Sofia. – 2006. – P. 153-157. (in Russian)
7. *Orlovskiy S.A.* Problems of making decision at fuzzy initial information. / S.A. Orlovskiy – Moscow: Science. Main release of phys.-math. literature, 1981. – 208 p. (in Russian)

Надійшла до редакції 12.03.13