

УДК 519.718.2

Королік Р.П., асп.,
Пічкур В.В., д.ф.м.н., доц.

Оцінка множини фазових обмежень множинної дискретної системи

У роботі одержано оптимальні оцінки множини фазових обмежень в задачі практичної стійкості дискретної множинної системи. Для випадку лінійної динамічної складової обґрунтовано теореми про оптимальні оцінки при конкретних фазових обмеженнях.

Ключові слова: дискретна система, множинна система, фазові обмеження.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: korolik@email.ua

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Задачі дослідження якісної поведінки дискретних систем набули широкого розповсюдження у науковій літературі. Це пов'язано з суттєвим прикладним значенням співвідношень такого класу. Так, ряд фізичних, біологічних та соціальних процесів описуються дискретними моделями. Крім того, в зв'язку з широким застосуванням обчислювальної техніки, актуальним є дослідження різницевих співвідношень, що застосовуються при побудові числових методів для різних класів задач. До аналізу дискретних систем застосовуються методи теорії стійкості [2, 6, 8]. В працях [2, 5] отримані оцінки і властивості максимальних множин практичної стійкості дискретних систем.

У випадку, якщо при дослідженні динамічної системи потрібно враховувати її просторову конфігурацію, одержуємо множинну динамічну систему. До множинної динамічної системи приходять також в задачі лінійної фільтрації, де динамічна компонента є фільтром, а множинна компонента є інформаційною областю [7]. Задача практичної стійкості множинною динамічною системою у неперервному випадку досліджувалась в [1].

В роботі одержано оптимальні оцінки множини фазових обмежень в задачі практичної стійкості дискретної множинної системи. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

R. P. Korolik*, grad. student
Pichkur V.V. doctor of science

Estimations of a set of phase constraints of discrete set systems

This paper is focused on the set of initial phase constraints in the problem of practical stability of discrete multiple systems. For the case of linear dynamic component is focused on theorems on optimal estimation at specific phase constraints.

Key Words: discrete set system, maximum set, phases constraints.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: korolik@email.ua

Будемо використовувати такі позначення:
 R^n – евклідовий n – вимірний простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в R^n , який породжує евклідову норму $\|\cdot\|$, $\text{int } A$, ∂A – сукупність внутрішніх точок і границя множини $A \subset R^n$ відповідно, $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера, $K_r(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq r\}$ – замкнута куля радіусу r з центром в точці $a \in R^n$, $c(A, \psi) = \sup_{x \in A} \langle x, \psi \rangle$ – опорна функція множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$, $\text{comp}(R^n)$ – сукупність всіх непорожніх компактів з R^n , $\text{conv}(R^n)$ – множина всіх непорожніх і опуклих компактів з R^n , $[0, N] = \{0, 1, \dots, N\}$ – множина індексів.

Основні означення і постановка задачі.

Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \quad (1)$$

$$B_k : R^m \rightarrow \text{comp}(R^n), \quad (2)$$

де $x \in R^m$, $f_k : D \rightarrow D \subset R^m$ – m – вимірна функція в області D , $\Phi(k) \in \text{comp}(R^n)$ – множина фазових обмежень. Відображення $B_k : R^m \rightarrow \text{comp}(R^n)$ – неперервне в області D [1, 4].

Означення 1. Система (1), (2) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкою, якщо $B_k(x(k, x_0)) \subset \Phi(k)$ для всіх $x_0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 2. Сукупність G_* з R^n називається максимальною за включенням множиною практичної стійкості системи (1), (2) при фазових обмеженях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0, N]$, якщо система (1), (2) є $\{G_*, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкою і $G_0 \subseteq G_*$ для всіх множин G_0 , для яких має місце $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ - стійкість системи (1), (2).

Нехай заданий клас множин $W = \{\Phi(k, p) : p \rightarrow \Phi(k, p), \Phi(k, p) \in \text{comp}(R^n), p \geq 0\}$.

Припустимо, що відображення $\Phi : p \rightarrow \Phi(k, p)$, $p \geq 0$ є неперервним і задовольняє такі умови:

$$\Phi(0) \subset \text{int } G_*; \quad \Phi(k, p) \subset \text{int } \Phi(k, q), \quad p < q.$$

Задача оцінки фазових обмежень $\Phi(k, p)$ максимальної за включенням множини практичної стійкості системи (1)-(2) у класі W полягає у знаходженні всіх значень параметра $p > 0$, при яких наявна $\{G_0, \Phi(k, p), 0, N\}$ - стійкість нульового розв'язку системи (1), (2).

Позначимо $G_*(p)$ - оптимальна за включенням множина практичної стійкості при фазових обмеженях $\Phi(k, p)$, $k \in [0, N]$.

Означення 3. Оптимальною оцінкою практичної стійкості для фазових обмежень системи (1), (2) у структурній формі W називається значення параметра

$$p_* = \max \{p \geq 0 : G_0 \subseteq G_*(p)\}.$$

За вищевказаних умов оптимальна оцінка існує та єдина, при цьому для неї виконується

$$\partial G_0 \cap \partial G_*(p) \neq \emptyset \quad [1].$$

Критерій оптимальної оцінки фазових обмежень

Розглянемо дискретну множинну систему вигляду

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad (3)$$

$$B_k : R^m \rightarrow \text{conv}(R^n), \quad (4)$$

де $A(k)$ - невироджена матриця розмірності $m \times m$ $k \in [0, N-1]$, $\Phi(k, p) \in \text{conv}(R^n)$ - множина фазових обмежень, B_k - неперервні відображення для яких виконується умова поділу

$$c(B_k(x), \psi) = \langle x, m_k(\psi) \rangle + n_k(\psi) \quad (5)$$

де $m_k(\psi) = c(B_k(1), \psi) - c(B_k(0), \psi) > 0$,

$$\begin{aligned} n_k(\psi) &= c(B_k(0), \psi) > 0, \quad m \in C(R^n, R^m), \\ n &\in C(R^n), \quad \|\psi\| \leq \mu \|m(\psi)\|, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Запишемо загальний розв'язок системи (3), (4) у вигляді

$$x(k) = \Theta(k)x_0, \quad k \in [1, N],$$

де $\Theta(k, s) = A_{k-1} \dots A_s = \prod_{s \leq i \leq k-1} A_i$ - невироджена матриця, $\Theta(k) = \Theta(k, 0)$, $s \in [0, k]$, $k \in [1, N]$, $\Theta(0)$ - одинична матриця.

Множину G_* можна подати у вигляді:

$$G_* = \bigcup_{e \in S} \{x = ke : k \in [0, d_*(e)]\}$$

де $d_*(e, p) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k, p), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle}$ -

функція деформації множини G_* .

Позначимо $d_0(e)$ функцію деформації множини G_0 . Тоді $\forall e \in S$ p_* є оптимальним значенням параметра p , якщо виконується

$$d_0(e) \leq d_*(e, p_*) \quad (6)$$

та $\exists \bar{e} \in S$, для якого має місце

$$d_0(\bar{e}) = d_*(\bar{e}, p_*). \quad (7)$$

Звідси випливає, що

$$\min_{e \in S} (d_*(\bar{e}, p_*) - d_0(\bar{e})) = 0.$$

Загальний випадок оптимальних оцінок фазових обмежень.

Нехай заданий клас множин

$$W = \{\Phi(k, p) : p \rightarrow \Phi(k, p), \Phi(k, p) \in \text{comp}(R^n), p \geq 0\}.$$

Відображення $\Phi : p \rightarrow \Phi(k, p)$, $p \geq 0$ - неперервне та задовольняє такі умови:

$$\Phi(0) \subset \text{int } G_*; \quad \Phi(k, p) \subset \text{int } \Phi(k, q), \quad p < q.$$

Позначимо:

$d_0(e)$ - функцію деформації множини G_0 ;

$d_*(e, p)$ - функцію деформації множини G_* ,

Представимо вираз (7) в такому вигляді

$$d_0(e) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k, p), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle},$$

$$k \in [0, N].$$

Припустимо, що справджується умова поділу:

$$\Phi(k, p) = p\Phi_1(k) + \Phi_2(k), \quad k \in [0, N],$$

де $\Phi_1(k), \Phi_2(k) \in \text{conv}(R^n)$.

Звідси отримуємо опорну функцію для фазових обмежень

$$c(\Phi(k, p), \psi) = pc(\Phi_1(k), \psi) + c(\Phi_2(k), \psi), \quad (8)$$

$$k \in [0, N], \psi \in S.$$

Зі співвідношень (6), (7) випливає, що $\forall e \in S$

$$d_0(e) \leq \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k, p), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle}.$$

При цьому $\exists \bar{e} \in S$ таке, що

$$d_0(\bar{e}) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k, p), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)\bar{e} \rangle}, \quad \bar{e} = e.$$

Це означає, що $\forall e \in S, \forall k \in [0, N], \forall \psi \in S$ використовуючи вираз (8) можемо записати наступне:

$$d_0(e) \leq \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{pc(\Phi_1(k), \psi) + c(\Phi_2(k), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle} \quad (9)$$

При цьому $\exists \bar{e} \in S, k \in [0, N], \psi \in S$ таке, що

$$d_0(\bar{e}) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{pc(\Phi_1(k), \psi) + c(\Phi_2(k), \psi) - n_k(\psi)}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)\bar{e} \rangle}.$$

Звідси зі співвідношення (9) можемо виразити p :

$$\begin{aligned} pc(\Phi_1(k), \psi) + c(\Phi_2(k), \psi) - n_k(\psi) &\geq \\ &\geq \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} d_0(e) \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle \\ p &\geq \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{d_0(e) \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle - c(\Phi_2(k), \psi) + n_k(\psi)}{c(\Phi_1(k), \psi)} \end{aligned} \quad (10)$$

Зі співвідношення (7) випливає, що в (10) для оптимальної оцінки досягається рівність.

Отже доведена така теорема.

Теорема 1. Оптимальна оцінка фазових обмежень в класі W має вигляд

$$p = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{d_0(e) \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle - c(\Phi_2(k), \psi) + n_k(\psi)}{c(\Phi_1(k), \psi)}.$$

Оптимальна оцінка множини фазових обмежень у вигляді кулі.

Нехай

$$W_1 = \{ \Phi(k, p) = K_p(0) : p \geq 0 \},$$

множинна компонента

$$B_k(x) = K_{r(k)}(x),$$

$$G_0 = K_{r(k)}(0), \quad r(k) > p(k) > 0, \quad k \in [0, N].$$

Оскільки $d_0(e) = r$, то

$$r \leq \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{p \|\psi\|}{\langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle}.$$

Тоді звідси можемо записати

$$p \geq \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} r(k) \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle.$$

Отже, для оптимальної оцінки фазових обмежень у даному випадку справджується таке співвідношення

$$p \geq p_* = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} r(k) \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle.$$

З урахуванням (7) одержуємо

$$\begin{aligned} p_* &= \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} r(k) \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle = \\ &= \max_{k \in [0, N]} r(k) \max_{\psi \in S} \langle m_k(\psi), \Theta(k)e \rangle. \end{aligned}$$

Оскільки $\max_{\psi \in S} \langle \psi, \Theta(k)e \rangle = \|\Theta(k)e\|$, то

$$p_* = \max_{k \in [0, N]} r(k) \|\Theta(k)e\|.$$

Зі співвідношення Релея [3] випливає, що

$$\max_{e \in S} \|\Theta(k)e\| = \sqrt{\max_{e \in S} \langle Q(k)e, e \rangle} = \sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}.$$

Тут $\lambda_{\max}(Q(k))$ - максимальне власне число симетричної додатновизначеній матриці $Q(k)$ розмірності $m \times m$. У такий спосіб доведено таку теорему.

Теорема 2. Оптимальна оцінка фазових обмежень в класі W_1 має вигляд

$$p_* = \max_{k \in [0, N]} r(k) \sqrt{\lambda_{\max}(Q(k))}.$$

Оптимальна оцінка фазових обмежень у формі еліпсоїда.

Нехай

$$W_2 = \{ \Phi(k, p) = E_p(0, Q(k)) : p \geq 0 \},$$

де $E_p(0, Q) = \{x \in R^m : \langle Qx, x \rangle \leq p^2\}$ є еліпсоїдом з центром в точці 0, множинна компонента

$$B_k(x) = K_{p(k)}(x),$$

$$G_0 = E_r(0, Q), \quad r(k) > p(k) > 0, \quad k \in [0, N],$$

$Q(k)$ - додатновизначена симетрична матриця розмірності $m \times m$, $k \in [0, N]$.

Аналогічно, як і у попередньому випадку, запишемо

$$r \leq \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{p \sqrt{\langle Q^{-1}(k)\psi, \psi \rangle}}{\langle \psi, \Theta(k)e \rangle}, \quad \forall e \in E_1(0, Q)$$

Тоді звідси виразимо p і отримуємо

$$\begin{aligned} p &\geq \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{r(k) \langle \psi, \Theta(k)e \rangle}{\sqrt{\langle Q^{-1}(k)\psi, \psi \rangle}}, \\ &k \in [0, N], \quad \forall e \in E_1(0, Q). \end{aligned}$$

Даний вираз запишемо у такому вигляді

$$p \geq \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \langle \psi, \Theta(k)e \rangle,$$

$$k \in [0, N], \forall e \in E_1(0, Q).$$

Спростимо останню рівність, розв'яжемо задачу на умовний екстремум

$$\max_{e \in E_1(0, Q)} \langle \psi, \Theta(k)e \rangle.$$

Для цього введемо заміну змінних $z = Q^{1/2}e$.

Оскільки $e \in E_1(0, Q)$, то вектор $z \in K_1(0)$. Тоді $e = Rz$, де $R = Q^{-1/2}$. Так як матриця Q є симетричною і додатновизначену, то можна ввести $Q^{1/2}$, що буде симетричною додатновизначену матрицею розмірності $m \times m$.

Звідси випливає, що $\max_{e \in E_1(0, Q)} \langle \psi, \Theta(k)e \rangle = \max_{z \in K_1(0)} \langle \psi, \Theta(k)Rz \rangle = \|R^*Q^*(k)\psi\| = \sqrt{\langle M(k)\psi, \psi \rangle}$.

Тут $M(k) = \Theta(k)RR^*\Theta^*(k)$. Оскільки $RR^* = Q^{-1}$, $M(k) = \Theta(k)Q^{-1}\Theta^*(k)$.

Покажемо, що для знаходження матриці $M(k)$ можна записати матричне дискретне рівняння.

Справді,

$$\begin{aligned} M(k+1) &= \Theta(k+1)Q^{-1}\Theta^*(k+1) = \\ &= A(k)\Theta(k)Q^{-1}\Theta^*(k)A^*(k) = A(k)M(k)A^*(k), \\ k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

При цьому $M(0) = Q^{-1}$.

Тоді рівність (10) ми запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} p &\geq \max_{k \in [0, N]} \max_{\langle Q^{-1}(k)\psi, \psi \rangle = 1} r(k) \sqrt{M(k)\psi, \psi}, \\ k &\in [0, N], \end{aligned}$$

$$\text{де } M(k+1) = A(k)M(k)A^*(k),$$

$$M(0) = Q^{-1}, \quad k \in [0, N-1].$$

Теорема 3. Оптимальна оцінка фазових обмежень в класі W_2 має вигляд

$$p \geq p_* = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} r(k) \sqrt{\lambda_{\max}(M(k))}, \quad k \in [0, N],$$

де $\lambda_{\max}(M(k))$ - максимальне власне число матриці $M(k)$,

$$M(k+1) = A(k)M(k)A^*(k), \quad M(0) = Q^{-1}, \quad k \in [0, N-1].$$

Оптимальна оцінка множини початкових умов у формі гіперкуба.

Розглянемо задачу в структурній формі

$$W_3 = \left\{ \Pi_p(0) : p \geq 0 \right\},$$

де $\Pi_p(0) = \bigcap_{i=1}^m \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^* : |x_i| \leq p \right\}$ - гіперкуб з центром в точці 0, множинна компонента

$$B_k(x) = K_{p(k)}(x),$$

$$G_0 = K_r(0), \quad r(k) > p(k) > 0, \quad k \in [0, N].$$

Запишемо для даного випадку співвідношення (6) в наступному вигляді:

$$r \leq \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{p \sum_{i=1}^m |\psi_i| + p \|\psi\|}{\langle \psi, \Theta(k)\psi \rangle} \quad \forall e \in \Pi_1(0).$$

Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 4. Оптимальна оцінка множини фазових обмежень в класі гіперкубів матиме вигляд

$$p \geq p_* = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} r(k) \frac{\sum_{i=1}^m |\theta_i(k)\psi_i|}{\sum_{i=1}^m |\psi_i| + 1} \quad k \in [0, N],$$

де $\theta_i(k) \in R^m$ - стовпчики матриці $\Theta(k)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Висновки. В роботі побудовано оптимальні оцінки множини фазових обмежень в задачі практичної стійкості множинної дискретної системи за умов, що динамічна складова є лінійною, а множинна складова задовільняє умову поділу. Одержані співвідношення мають алгоритмічну спрямованість.

Список використаних джерел

1. Bashnyakov O.M., Garashchenko F.G., Pichkur V. V. Practical stability, evaluation and optimization. – K.: Kyiv University, 2008. – 383 p. (in Ukrainian)
2. Bashnyakov A.N., Pichkur V.V., Hitko I.W. The maximal set of initial conditions in problems practical stability discrete system // Journal of Automation and Information Sciences. – 2011. – №2. – P.5-11. (in Russian)
3. Beklemishev D.W. Additional chapters of linear algebra. – M.: Nauka, 1983. – 336 p. (in Russian)
4. Blagodatskikh W. I. The theory of differential inclusions. – M.: Moscow State University Press, 1979. – 88 p. (in Russian)
5. Bublik B. N., Garashchenko F.G., Kirichenko N. F. Structural and parametric optimization and stability of the beam dynamics. – Kyiv: Naukova dumka, 1985. – 304 p. (in Russian)
6. Halanay A., Wexler D. Qualitative theory of impulsive systems. – M.: Mir, 1971. – 309 p.
7. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Boston: IIASA and Birkhauser. – 1997. – 321 p.
8. Martynyuk A.A. Stability analysis of discrete systems // International Applied Mechanics – 2000. – Vol.36, No. 7. – P. 3-34.

Надійшла до редколегії 07.03.2013 р.