

УДК 627.324.2/3:532.72

О.Р. Мічута¹, аспірант,
А.П. Власюк², д.т.н., професор,
П.М. Мартинюк³, к.ф.-м.н., доцент.

R-вимірною задачею впливу багатоконпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів

Побудовано математичну модель R-вимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатоконпонентних хімічних розчинів і неізотермічних умов. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом радіальних базисних функцій. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: фільтраційна консолідація, хімічна суфозія, просідання.

¹ Національний університет водного господарства та природокористування (НУВГП), 33028, м. Рівне, вулю Соборна, 11
e-mail: michuta@ukr.net

² НУВГП, 33028, м. Рівне, вулю Соборна, 11
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

³ НУВГП, 33028, м. Рівне, вулю Соборна, 11
e-mail: Martinjuk@ukr.net

O.R. Michuta¹, PhD student,
A.P. Vlasyuk², Doctor of science, prof.,
P.M. Martyniuk³, PhD, assoc. prof.

R-dimensional problem of the influence of multicomponent chemical solutions on the processes of filtration consolidation of soils

The R-dimensional mathematical model of soil filtration consolidation problem has been built taking into account multicomponent chemical solution and unisothermal conditions. The numerical solutions of corresponding boundary-value problem have been found by the radial base functions method. The series of numerical experiments and their analysis have been carried out.

Key Words: filtration consolidation, chemical suffosion, subsidence.

¹ National University of Water Management and National Resources Use (NUWMNRU), 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: michuta@ukr.net

² NUWMNRU, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

NUWMNRU, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: Martinjuk@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Ущільнення повністю насиченого ґрунту під впливом зовнішніх навантажень або його власної ваги можливе лише при переміщенні (витісненні) деякої частини порової рідини з пор ґрунту (в припущенні нестискуваності твердих частинок). Тому деформації розглядуваного масиву ґрунту пов'язані з фільтраційними процесами порової рідини. Як правило, причиною інтересу до задачі консолідації є порушення стійкості ґрунтових основ при будівництві цивільних та промислових об'єктів, а також аварії гідротехнічних споруд.

До побудови математичної моделі описаної задачі консолідації можна йти

двома шляхами. Перший – використання співвідношень теорії пружності для пористих середовищ. Вказаний напрямок отримав назву «теорія об'ємних сил» і використаний в роботах [1-3]. Інший шлях – звести задачу консолідації до визначення динаміки зміни надлишкових напорів в поровій рідині. Такий підхід отримав назву «теорія фільтраційної консолідації ґрунтів». Відразу зазначимо, що на вказаній теорії ґрунтується і представлена стаття. Застосування вказаної теорії ґрунтується на ряді припущень: принцип гідроємності М.М. Герсеванова [1]; основна розрахункова модель В.І. Флоріна [2]. Отримана в результаті крайова задача

набагато простіша, аніж згідно першого підходу. Фільтраційна теорія консолідації ґрунтів досить повно описана в роботах [2, 4]. Крім того, в роботах [5, 6] класичні математичні моделі фільтраційної консолідації доповнені та вдосконалені шляхом урахування впливу теплового поля та змінного поля концентрації солей у поровому розчині.

Однак в цих роботах в якості порової рідини розглядався однокомпонентний сольовий розчин. Насправді ж, в природних умовах, поровий розчин є багатокомпонентним. Прикладом може бути загіпсований ґрунт, в пори якого починає надходити інший сольовий розчин в результаті аварії на хімічному підприємстві, або як результат неконтрольованого витоку. Загіпсовані ґрунти досить часто використовуються в якості основ для будівництва. Моделювання поведінки таких ґрунтів має свої особливості. Основна – це необхідність урахування розчинення гіпсу (хімічної суфозії) в процесі будівництва та експлуатації споруд на цих ґрунтах [7].

Розгляд вказаних задач вимагає дослідження випадку, коли поровий розчин є багатокомпонентним за своїм хімічним складом. Моделювання фільтрації та масопереносу багатокомпонентних розчинів проведено в роботі [8].

Одна із цілей даної статті полягає у побудові математичної моделі консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокомпонентних сольових полів та температури. Елементи таких досліджень наведено в роботах [6, 9-12].

Математична модель процесу фільтраційної консолідації. Математична модель R -вимірної задачі консолідації ґрунту в області під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу s -компонентного сольового розчину та неізотермічних умов на основі робіт [6, 9] може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma a} \times \left(\nabla \cdot \left(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h - \sum_{s=1}^S (\mathbf{v}_s \nabla c_s) - \mathbf{v}_T \nabla T \right) \right) + \sum_{s=1}^S \frac{\varepsilon_s (1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma \rho_s a} \left(n \frac{\partial c_s}{\partial t} - e \frac{\partial N_s}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad s = \overline{1, S}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla c_s) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c_s) = n \frac{\partial c_s}{\partial t} + \frac{\partial N_s}{\partial t}, \quad s = \overline{1, S}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} = -\gamma_s (C_s^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_s) N_s^{\alpha_s}, \quad s = \overline{1, S}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} - e \mathbf{v} = -\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h + \sum_{s=1}^S \mathbf{v}_s \nabla c_s + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c_s(\mathbf{X}, 0) = C_s^{(0)}(\mathbf{X}), \quad N_s(\mathbf{X}, 0) = N_s^{(0)}(\mathbf{X}), \quad s = \overline{1, S}, \quad (6)$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega},$$

$$l_h h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = H_1(\mathbf{X}, t),$$

$$l_{c_s} c_s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = C_s^{(1)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad s = \overline{1, S}, \quad (7)$$

$$l_T T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

$$\frac{dl(\mathbf{X}, t)}{dt} = - \int_{l(\mathbf{X}, t)}^{L(\mathbf{X}, t)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{s=1}^S \frac{N_s}{\rho_s} (1+e) \right) (1+e)} \times \left(\frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \times \sum_{s=1}^S \left(\frac{\gamma_s}{\rho_s} (C_s^{(\max)} - c_s) N_s^{\alpha_s} \right) dx \right) \quad (8)$$

де $t \in [0; t_0]$, $l_h, l_{c_s}, l_T, s = \overline{1, S}$ - оператори, що задають граничні умови на межі Γ для напору, концентрації солей у рідкій фазі та температури відповідно; $H_0(\mathbf{X}), C_s^{(0)}(\mathbf{X}), N_s^{(0)}(\mathbf{X}), s = \overline{1, S}, T_0(\mathbf{X}), H_1(\mathbf{X}, t), T_1(\mathbf{X}, t)$ - задані функції. Тут використані наступні позначення: $h(\mathbf{X}, t)$ - надлишкові напори в поровій рідині;

$\mathbf{c}(\mathbf{X}, t) = \{c_s(\mathbf{X}, t)\}_{s=1}^S$, $\mathbf{N}(\mathbf{X}, t) = \{N_s(\mathbf{X}, t)\}_{s=1}^S$ - вектори концентрації солей в рідкій та твердій фазах відповідно; e - коефіцієнт пористості; γ - питома вага сольового розчину; a - коефіцієнт стисливості ґрунту; ξ - коефіцієнт бічного тиску ґрунту; $\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$ - коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах та температури; $\mathbf{v}_s = \{v_{sij}\}$, $s = \overline{1, S}$, $\mathbf{v}_T = \{v_{Tij}\}$, $i, j = \overline{1, R}$ - коефіцієнти хімічного та термічного осмосів; N_s , $s = \overline{1, S}$ - концентрації солей в твердій фазі; ρ_s , $s = \overline{1, S}$ - густини солей в твердій фазі; n - пористість ґрунту; $\mathbf{D}_s = \{D_{sij}\}$, $s = \overline{1, S}$, $i, j = \overline{1, R}$ - коефіцієнти дифузії; γ_s , $s = \overline{1, S}$ - коефіцієнти швидкості масообміну; α_s , $s = \overline{1, S}$ - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи [13]; $\mathbf{D}_{Ts} = \{D_{Ts}^{(ij)}\}$, $s = \overline{1, S}$, $i, j = \overline{1, R}$ - коефіцієнти термічної дифузії; $C_s^{(\max)}$, $s = \overline{1, S}$ - концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі; $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, R}$ - коефіцієнт теплопровідності вологого ґрунту; ρ - густина порового сольового розчину; C_ρ - питома теплоємність порового сольового розчину; C_T - об'ємна теплоємність ґрунту; $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3; \dots; u_R)$ - вектор швидкості фільтрації; $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3; \dots; v_R)$ - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

В процесі консолідації тверді частинки ґрунту зближаються. Як результат – верхня межа ґрунту просідає і область консолідації змінюється з часом. Крім того, зміна області консолідації може відбуватись і за рахунок хімічної суфозії. Тому крайова задача (1)-(7) доповнена кінематичною граничною умовою на рухомій верхній межі (8). Дану умову виведено в R - вимірному випадку, припустивши, що ґрунт може просідати лише за рахунок вертикальних зміщень. Тут верхня межа ґрунту описується рівнянням $x_1 = l(x_2, x_3, \dots, x_R, t)$, де x_1 - вертикальна координата.

Умову (8) запишемо у вигляді

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(\mathbf{x}, t)}^{L(\mathbf{x}, t)} F(\mathbf{c}, \mathbf{N}, h) dx. \quad (9)$$

Чисельне розв'язання крайової задачі. Чисельне розв'язання крайової задачі (1)–(8) здійснене методом радіальних базисних функцій [6]. Покриємо область Ω вузловими точками $\mathbf{X}_j = (x_{1j}^{(x)}, x_{2j}^{(x)}, \dots, x_{Rj}^{(x)})$, $j = \overline{1, m}$. Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (1)–(8) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \\ c_s(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m c_{sj}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_s), \\ N_s(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m N_{sj}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_s}), \quad s = \overline{1, S}, \\ T(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \end{aligned} \quad (10)$$

де $\varepsilon_h, \varepsilon_s, \varepsilon_{N_s}, \varepsilon_T$, $s = \overline{1, S}$, – параметри форми; $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$ – радіальні базисні функції; $h_j(t), c_{sj}(t), N_{sj}(t), T_j(t)$, $s = \overline{1, S}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу; $r_j = \sqrt{(x_1 - x_{1j}^{(x)})^2 + (x_2 - x_{2j}^{(x)})^2 + \dots + (x_R - x_{Rj}^{(x)})^2}$, $j = \overline{1, m}$.

Покриємо замикання області $\overline{\Omega}$ колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_{1i}^{(y)}, x_{2i}^{(y)}, \dots, x_{Ri}^{(y)})$, $i = \overline{1, M}$. Введемо множини $\varpi = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Omega\}$, $\gamma_1^{(h)} = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_1^{(h)}\}$, $\gamma_2^{(h)} = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_2^{(h)}\}$. Тут $\Gamma_1^{(h)}$, $\Gamma_2^{(h)}$ - частини межі Γ , де для функції $h(\mathbf{X}, t)$ задано граничні умови першого та другого роду відповідно. Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{(x_{1i}^{(y)} - x_{1j}^{(x)})^2 + \dots + (x_{Ri}^{(y)} - x_{Rj}^{(x)})^2}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$i = \overline{1, M}, \quad m \geq M.$$

Підставляючи (10) в рівняння (1)–(4), початкові умови (6) та граничні умови (7), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$, $\mathbf{C}_s(t) = \{c_{sj}(t)\}_{j=1}^m$, $\mathbf{N}_s(t) = \{N_{sj}(t)\}_{j=1}^m$, $s = \overline{1, S}$, $\mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}_s(t), \mathbf{N}_s(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{H}(t) = \\ = \mathbf{K}_s^{(1)} \frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt} + \mathbf{A}_s^{(1)} \frac{d\mathbf{C}_s(t)}{dt} + \\ + \mathbf{A}_s^{\prime(1)} \mathbf{C}_s(t) + \mathbf{E}^{\prime(1)} \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s^{(2)} \frac{d\mathbf{C}_s(t)}{dt} + \mathbf{L}_s^{(2)}(\mathbf{C}_s(t), \mathbf{N}_s(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{C}_s(t) = \\ = \mathbf{K}_s^{(2)} \frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt} + \mathbf{E}^{\prime(2)} \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, s = \overline{1, S} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_s^{(3)} \frac{d\mathbf{N}_s(t)}{dt} = \mathbf{L}_s^{(3)}(\mathbf{C}_s(t), \mathbf{N}_s^{a_s}(t)), s = \overline{1, S}, \quad (13)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}_s(t), \mathbf{N}_s(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(4)}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \mathbf{H}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{M}}_s^{(2)} \mathbf{C}_s^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_s^{(3)} \mathbf{N}_s^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, s = \overline{1, S}, \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \mathbf{T}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\mathbf{M}_s^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $\tilde{\mathbf{M}}_s^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$,
 $\mathbf{L}_s^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $k = 2, 3$; $\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$,
 $\tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $k = 1, 4$;
 $\mathbf{K}_s^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $k = 1, 2$; $\mathbf{A}_s^{(1)} = \{a_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$,
 $\mathbf{A}_s^{\prime(1)} = \{a_{ij}^{\prime(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $\mathbf{E}^{\prime(1)} = \{e_{ij}^{\prime(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$,
 $\mathbf{E}^{\prime(2)} = \{e_{ij}^{\prime(2)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}$, $\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_j^{(k)}\}_{j=1}^m$,
 $\mathbf{F}^{(k)} = \{f_j^{(k)}\}_{j=1}^m$, $k = \overline{1, 4}$, $s = \overline{1, S}$.

Елементи матриць задачі Коші (10)–(14) визначаються однотипно, але досить громіздко. Так для рівняння теплопровідності (4) маємо

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(4)} = -c_T \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), i = \overline{\omega}; \\ l_{ij}^{(4)} = \begin{cases} \nabla(\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) - \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i = \overline{\omega}, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \gamma_1^{(T)}; \\ (\nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^{(T)}; \end{cases} \\ f_j^{(4)} = \begin{cases} T_1(t), & i \in \gamma_1^{(T)}; \\ 0, & i \in \gamma_2^{(T)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (10)–(14) дискретизуємо часовий відрізок рівномірно з кроком τ . Для дискретизації рівнянь (10), (11), (13) по часу використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [6, 15]. Оскільки рівняння (12) є нелінійними, то для їх лінеаризації використано метод Ньютона [15].

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s^{(3)} \frac{\mathbf{N}_s^{(k+1)} - \mathbf{N}_s^{(k)}}{\tau} = \alpha_s \mathbf{L}_s^{(3)}(\mathbf{C}_s^{(k)}, \mathbf{N}_s^{(a_s-1)}(t_k)) \times \\ \times (\mathbf{N}_s^{(k+1)} - \mathbf{N}_s^{(k)}) + \mathbf{L}_s^{(3)}(\mathbf{C}_s^{(k)}, \mathbf{N}_s^{a_s}(t_k)), s = \overline{1, S}. \end{aligned}$$

Отриману після дискретизації по часу систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) розв'язано модифікованим методом Гауса, але перед цим попередньо використовувався метод найменших квадратів [16].

Для перерахунку координат вузлових та коллокаційних точок використано кінематичну граничну умову (9):

$$\frac{x_{1j}^{(k+1)} - x_{1j}^{(k)}}{\tau} = - \int_{l^{(k)}(\mathbf{x}, t)}^{L(\mathbf{x}, t)} F(\mathbf{c}^{(k+1)}, \mathbf{N}^{(k+1)}, h^{(k+1)}) dx.$$

Результати чисельних експериментів.

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву загіпсованого ґрунту форми прямокутного паралелепіпеда довжиною ребер 24 м , 24 м , 10 м по осях Ox , Oy та Oz відповідно (рис.1). Нехай $c_1(\mathbf{X}, t)$, $N_1(\mathbf{X}, t)$ - концентрації звичайної кам'яної солі NaCl , яка починає надходити в ґрунт з фундаменту споруди; $c_2(\mathbf{X}, t)$, $N_2(\mathbf{X}, t)$ - концентрації гіпсу.

Межу $ABCD$ позначимо як Γ_1 , $KLMN$ – Γ_2 , $A_1B_1C_1D_1$ – Γ_3 , ABC_1D_1 і CDC_1D_1 – Γ_4 , $ADA_1D_1 \cup BCB_1C_1$ – Γ_5 . Граничні умови в чисельних експериментах взято наступними:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0, h(\mathbf{X}, t)_{\Gamma_1} = H_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1,$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\Gamma_4} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{\Gamma_5} = 0, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{\Gamma_5} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{\Gamma_4} = 0,$$

$$c(\mathbf{X}, t)_{\Gamma_2} = C_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{\Gamma_3} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\Gamma_5} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\Gamma_4} = 0,$$

$$T(\mathbf{X}, t)_{\Gamma_1} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1,$$

$$T(\mathbf{X})_{\Gamma_2} = T_2(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, t > 0.$$

В області $KLMN$ ґрунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q=20 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 \text{ доба}$. Область $KLMN$ – квадрат зі сторонами, паралельними відповідним осям координат при $x \in [6, 16]$ та $y \in [6, 16]$.

Для надлишкових напорів межі $ABCD$, ADA_1D_1 , ABA_1B_1 , CDC_1D_1 , BCB_1C_1 є

дренованими, а область KLMN та межа $A_1B_1C_1D_1$ - непроникні. Для концентрації солей межі ABA_1B_1 , CDC_1D_1 , $A_1B_1C_1D_1$, ADA_1D_1 , $B_1C_1D_1$, $ABCD$ непроникні, а область KLMN є дренованою. Температура на межі ABCD та області KLMN вважається відомою.

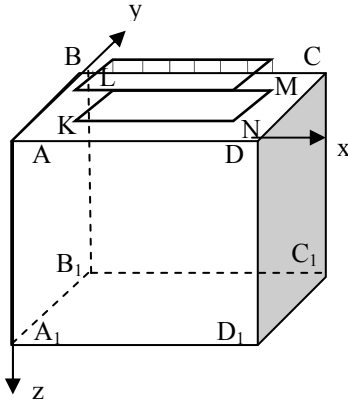


Рис. 1. Фільтраційна консолідація загіпсованого масиву ґрунту

Вхідні дані вибираємо наступними:

$$\begin{aligned}
 n &= 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.5, \\
 a &= 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad \rho_1 = 2300 \text{ кг} / \text{м}^3, \\
 \rho_2 &= 2100 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad C_2^{(\max)} = 350 \text{ г} / \text{л}, \\
 D_1 &= 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}, \quad D_2 = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}, \\
 \gamma &= 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), \quad \gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}, \\
 \gamma_2 &= 0 \text{ доба}^{-1}, \\
 \nu_1 &= 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), \\
 \nu_2 &= 2.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), \quad C_1(t) = C_m, \\
 \xi &= 0.75, \quad T_1(t) = 30^\circ \text{C}, \\
 C_\rho &= 4.2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{град}), \\
 \lambda &= 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), \\
 C_T &= 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot \text{град}), \\
 \nu_T &= 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}),
 \end{aligned}$$

$$T_2(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right),$$

$$C_2^{(0)} = \begin{cases} 350 \text{ г} / \text{л}, & z = 0, \\ 10 \text{ г} / \text{л}, & z \neq 0; \end{cases} \quad T_0 = \begin{cases} 30^\circ \text{C}, & z = 0, \\ 4^\circ \text{C}, & z \neq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладалася рівним $0,001 \text{ м} / \text{доба}$. Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазі визначався за формулою [16]

$$K_h(C_1, N_1, T) = k_0(C_1, T) e^{-\gamma \frac{N_1}{C_1^{(\max)}}},$$

де $k_0(C_1, T)$ - коефіцієнт фільтрації, апроксимований згідно експериментальних даних взятих з монографії [6].

Загіпсованість ґрунту становить $m=20\%$, а густина ґрунту $\rho_g = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3$. Початкове значення гіпсу в твердій фазі обчислювалось за формулою $N_1^{(0)} = \frac{m}{100} \rho_g$.

Кількість вузлових і колокаційних точок покладалася рівною 2744. Крок по часу $\tau = 10$ діб. Кількість часових проміжків 31. Параметр форми для невідомих функцій становив $\varepsilon = 2.5$.

Значення концентрації граничного насичення гіпсу $C_2^{(\max)}(C_1, T)$, що залежить від концентрації солі та температури отримано внаслідок апроксимації даних, взятих з [17].

Початковий розподіл надлишкових напорів $h_0(x, y, z)$ залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження $q(x, y)$ в області Φ його прикладання, яка лежить у площині $z = 0$. Для довільної точки $\mathbf{X} = (x, y, z)$ області консолідації, що не належить до області Φ прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [4]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\theta(\mathbf{X})}{3\gamma},$$

де $\theta(\mathbf{X})$ - сума головних напружень у точці \mathbf{X} , яка визначається згідно формули [4]

$$\theta(\mathbf{X}) = \iint_{\Phi} \frac{q(\xi, \eta, 0)}{\pi} (1 + \nu) \frac{z}{r^3} d\xi d\eta,$$

де $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$; ν - коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо випадок, коли область Φ являє собою прямокутник $x \in [a; b]$, $y \in [c; d]$, а площина прикладання навантаження і паралельною до площини XOY . Тоді для наближеного обчислення вищенаведеного інтеграла можна використати квадратурні формули.

При вказаних даних у площині при $x = 12 \text{ м}$, паралельній YOZ , були знайдені значення напору, концентрації солей та гіпсу у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадратичної

Величина просідань верхньої межі ґрунту за 300 діб при $x = 12$ м, $y = 12$ м

№	Параметри	I	II	III
1	$m=10\%, q=20 \cdot 10^4$ кг/м ² доба ²	18,31 см	17,59 см	4,09 %
2	$m=10\%, q=0$ кг/м ² доба ²	1,08см	0,31 см	248,39 %
3	$m=20\%, q=20 \cdot 10^4$ кг/м ² доба ²	22,03 см	21,16 см	4,11 %
4	$m=20\%, q=0$ кг/м ² доба ²	1,25 см	0,32 см	290,62 %
5	$m=30\%, q=20 \cdot 10^4$ кг/м ² доба ²	27,69 см	26,59 см	4,14 %
6	$m=30\%, q=0$ кг/м ² доба ²	1,52 см	0,36 см	322,22 %

РБФ $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ і побудовані відповідні графіки (рис.2, 3).

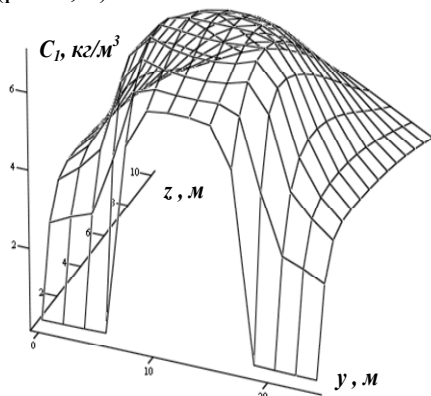


Рис.2. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ($C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$)

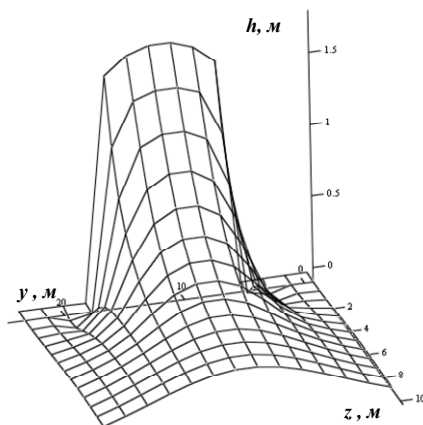


Рис.3 Розподіл надлишкових напорів

В нижченаведеній таблиці: I - величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$; II - величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = const$; III - збільшення просідань при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ в порівнянні $C_2^{(\max)} = const$.

З нижченаведеної таблиці видно, що урахування залежності концентрації граничного насичення гіпсу призводить до збільшення

величини просідання верхньої межі масиву ґрунту. Це можна пояснити тим, що гіпс розчиняється швидше при збільшенні концентрації солі в поровій рідині. Для порівняння можна проаналізувати останній стовпець таблиці, в якому наведено збільшення просідання у відсотках. Також в таблиці наведено результати просідання при різній загіпсованості ґрунту (10%, 20% та 30%). Збільшення загіпсованості ґрунту призводить до збільшення просідання ґрунту.

Корисними є чисельні експерименти з визначення просідання верхньої межі масиву ґрунту при відсутності початкових надлишкових напорів. Зокрема, як видно з таблиці, просідання в результаті розчинення гіпсу при загіпсованості 20% і урахування залежності $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ збільшується від 0,32 см до 1,25 см (на 290,62 %). Тобто, якщо процес консолідації ґрунту під фундаментом цеху хімічного виробництва завершився, але в ґрунт починає надходити не вода, а сольовий розчин, то це спричиняє додаткові просідання. До того ж, ці просідання будуть нерівномірними. Тому урахування дії не чистої води, а сольового розчину може значно змінити прогностичні розрахунки просідання будівель на загіпсованих ґрунтах.

Висновки. В роботі досліджено вплив багатокомпонентних сольових розчинів та температури на розподіл надлишкових напорів та на просідання верхньої межі масиву ґрунту. При проведенні і аналізі чисельних експериментів виявлено, що надходження в загіпсований ґрунт іншого хімічного розчину може значно змінити прогностичні розрахунки просідання ґрунту.

Подальші дослідження будуть стосуватися якісної теорії крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі та обґрунтуванню точності та збіжності отриманих наближених розв'язків.

Список використаних джерел

1. *Zaretskyi J.K.* Theory of soils consolidation / J.K. Zaretskyi. - Moscow: Nauka. - 1967. - 270 p. (in Russian).
2. *Florin V.A.* Fundamentals of soil mechanics **V.2.** / V.A. Florin. - Moscow: Gosstroyizdat, 1961. - 560 p. (in Russian).
3. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation / M.A. Biot // J. Appl. Phys. - 1941. - Vol. 12, №2. - Pp. 155-165 (in English).
4. *Ivanov P.L.* Soils and foundation of hydrotechnical constructions. Soil mechanics. / P.L. Ivanov. - Moscow: Vyshaya shkola, 1991. - 447 p. (in Russian).
5. *Bulavatskyi V.M.* Mathematical modeling of filtration consolidation taken into account of salt transfer in the system of the double relaxation / V.M. Bulavatskyi, V. Skopetskyi // Cybernetics and system analysis. - 2008. - № 1. - P. 116-126. (in Ukrainian).
6. *Vlasyuk A.P.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation under filtration of saline fluid in unisothermal conditions. / A.P. Vlasyuk, P.M. Martiniuk - Rivne: NUVGP, 2008. - 416 p. (in Ukrainian).
7. *Petrukhin V.P.* Computation of the suffusion deformations in the saline soils / V.P. Petruhin // Bases, foundations and soil mechanics. - 1995. - № 5. - S. 11-13. (in Russian).
8. *Class H.* Numerical simulation of non-isothermal multiphase multicomponent processes in porous media. 1. An efficient solution technique / H. Class, R. Helmig, P. Bastian // Advances in Water Resources. - 2002. - 25. - Pp. 533-550 (in English).
9. *Vlasyuk A.P.* Numerical solution of consolidation problems and filtration destruction of soil in conditions of heat and mass transfer by radial basis functions method / A.P. Vlasyuk, P.M. Martiniuk. - Rivne: NUVGP, 2010. - 277 p. (in Ukrainian).
10. *Michuta O.R.* Mathematical modeling of soils consolidation considering non-isothermal conditions and the impact of multicomponent chemical solutions in one-dimensional case / O.R. Michuta // Scientific notes of NaUKMA. - Ser. computer sciences. - 2012. - V. 138. - P. 100-105. (in Ukrainian).
11. *Michuta O.R.* Mathematical modeling of the effect of the chemical suffusion on filtration consolidation of saline soils in non-isothermal conditions / O.R. Michuta, A.P. Vlasyuk, P.N. Martiniuk // Mathematical modeling. - 2013. - V.25. - Number 2. - P. 3-18. (in Russian).
12. *Michuta O.R.* Mathematical modeling of chemical suffusion on filtration consolidation of saline soils in non-isothermal conditions in the two-dimensional case / O.R. Michuta, A.P. Vlasyuk, P.M. Martiniuk // Bulletin of Taras Shevchenko National Univ. of Kyiv. - Ser. Physics and Mathematics. - 2011. - Issue 4. - P. 169-175. (in Ukrainian).
13. *Verigin N.N.* Convective diffusion and mass transfer in the process of solution filtration in porous media / N.N. Verigin, V.S. Sarkisian // Hydrogeological studies of water intake, water step-down and drainage systems. - Moscow, 1980. - P. 19-24. (in Russian).
14. *Samarskyi A.A.* Numerical methods of mathematical physics / A.A. Samarskyi and A.V. Gulin. - Moscow: Scientific World, 2003. - 316 p. (in Russian).
15. *Shakhno S.M.* Numerical methods of linear algebra / S.M. Shakhno. - Lviv: Ivan Franko National University of Lviv., 2007. - 243 p. (in Ukrainian).
16. *Dobronravov O.O.* Modeling of groundwater filtration considering suffusion and mudding / O.O. Dobronravov, V.S. Kremez // Problems of water supply, drainage and hydraulics. - 2006. - Vol. 7. - P. 141-146. (in Ukrainian).
17. *Lukner L.* Modeling of undergroundwater water migration / L. Lukner, V.M. Shestakov. - Moscow: Nedra, 1986. - 208 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 21.02.13