УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк О.С., к. ф.-м. н.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н.

Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами

Запропоновано нові класи першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів. Характерною їх особливістю є використання композицій розширеної реномінації (перейменування) та розширеної квантифікації, що дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен. Описано основні семантичні властивості цих логік.

Ключові слова: логіка, предикат, реномінація, квантор.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

M.S. Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor, O.S. Shkilniak, PhD, S.S. Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.).

Logics of partial predicates with extended renominations and quantifiers

New classes of pure first-order composition-nominative logics of partial quasiary predicates are proposed. Its specific feature is a usage of extended renomination (renaming) and extended quantification. This gives possibility to indicate explicitly the absence of the value of subject variables. Basic semantic properties of such logics are described.

Key words: logic, predicate, renomination, quantifier.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання предметних областей, він є основою сучасних інформаційних і програмних систем. Для цього зазвичай використовується класична логіка предикатів та базовані на її основі спеціальні логіки. Водночас принципові обмеження класичної логіки зумовлюють необхідність побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ), збудовані на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу.

Метою даної роботи є побудова нових класів КНЛ часткових предикатів. Пропонуються чисті першопорядкові КНЛ квазіарних предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами. Характерною їх особливістю є використання композицій розширеної реномінації (перейменування), які дають змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен (змінних), тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. За допомогою композицій розширеної реномінації визначаємо композиції розширеної квантифікації (розширені квантори). Запропоновані чисті першопорядкові КНЛ з розширеними реномінаціями (ЧКНЛРР) можна трактувати як підрівень чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ).

Дотримуємось позначень роботи [1].

Наведемо основні визначення необхідні для подальшого викладу. Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [1, 2].

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це довільна однозначна функція $\delta : V\to A$. Тут V і A –множини предметних імен і предметних значень.

V-ІМ подаємо у вигляді $[v_1\mapsto a_1,...,v_n\mapsto a_n,...]$. Тут $v_i\in V$, $a_i\in A$, $v_i\neq v_j$ при $i\neq j$.

Для V-ІМ введемо функцію $asn : {}^VA\to 2^V$:

$asn(\delta) = \{v\in V \mid v\mapsto a\in\delta$ для деякого $a\in A\}$.

Введемо параметричні операції $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем x та $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із X:

$$\delta\|_{-x} = \{v\mapsto a\in\delta \mid v\neq x\};\ \delta\|_{-X} = \{v\mapsto a\in\delta \mid v\notin X\}.$$

Операцію ∇ накладки V-ІМ δ на V-ІМ η задаємо так: $\eta\nabla\delta = \delta\cup(\eta\|_{-asn(\delta)})$.

V-квазіарний предикат на A – це предикат вигляду $P : {}^VA\to\{T, F\}$.

Область істинності та область хибності предиката $P : {}^VA\to\{T, F\}$ – це множини

$\boldsymbol{T}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d)\downarrow = T\}$,
$\boldsymbol{F}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d)\downarrow = F\}$.

V-квазіарний предикат P на A:
– неспростовний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– тотожно істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = {}^V\!A$ і $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;
– тотожно хибний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ і $\boldsymbol{F}(P) = {}^V\!A$;
– всюди невизначений, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Надалі тотожно істинний предикат будемо позначати як T, тотожно хибний – як F, всюди невизначений – як $\perp$.

1. Розширені реномінації

Відсутність значення для імені x задаємо парою, де верхнє ім'я – x, відповідне нижнє ім'я – спеціальний символ $\perp$. Операцію розширеної реномінації $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ задамо так:

$$r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}(\delta) =$$
$$= \delta\,\|_{-\{x_1,...,x_n,u_1,...,u_m\}} + [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)].$$

Зокрема, $r^{x}_{\perp}(\delta) = \delta\,\|_{-x}$.

Ввівши позначення $\overline{y}$ для $y_1,...,y_n$, будемо також скорочено писати $r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ замість $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}$.

Із визначення $r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}$ випливає її монотонність:

Твердження 1. $d_1 \subseteq d_2 \;\Rightarrow\; r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d_1) \subseteq r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d_2)$.

Нехай $\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t},\overline{v},\overline{z}$ задають попарно диз'юнктні множини імен. Тоді для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо

$$r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp}(r^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}(d)) = r^{\overline{u},\overline{s},\overline{v},\overline{w},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{y},\perp,\perp,\perp}(d),$$

де кожні $p_i \in \{\overline{p}\}$ та $q_i \in \{\overline{q}\}$ задаються так:

$$p_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\overline{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } x_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\overline{s}\}, \\ x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\overline{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\overline{t}\}; \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } a_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\overline{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } a_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\overline{s}\}, \\ a_i, \text{ якщо } a_i \notin \{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\overline{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\overline{t}\}. \end{cases}$$

Так визначену операцію $r^{\overline{u},\overline{s},\overline{v},\overline{w},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{y},\perp,\perp,\perp}$ назвемо *згорткою* операцій реномінації $r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp}$ та $r^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}$. Будемо її позначати $r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp} \bullet^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}$.

Композицію розширеної реномінації (розширену реномінацію) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ визначаємо за допомогою операції $r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ традиційним чином:

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)(d) = P(r^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(d)).$$

Твердження 2. Ім'я $x \in V$ строго неістотне для $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)$.

Справді, для всіх $d \in {}^V\!A$ та $a \in A$ маємо:

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)\,(d\nabla x \mapsto a) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)\,(d\,\|\text{-}x).$$

Властивості композицій $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$ аналогічні відповідним властивостям традиційної композиції $\mathrm{R}^{\overline{v}}_{\overline{x}}$ (див., напр., [1]):

$\mathrm{R}_\perp$T) $\mathrm{R}^{z,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – згортка тотожної пари імен;

$\mathrm{R}_\perp\neg$) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\neg P) = \neg\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – R¬-дистрибутивність;

$\mathrm{R}_\perp\vee$) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P \vee Q) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) \vee \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Q)$ – R∨-дистрибутивність.

Подібним чином для розширеної реномінації записуємо $\mathrm{R}_\perp\!\to$, $\mathrm{R}_\perp\&$, $\mathrm{R}_\perp\!\leftrightarrow$.

$\mathrm{R}_\perp$R) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp} \circ^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – згортка реномінацій.

Згортка композицій реномінації задається через згортку операцій реномінації.

Для довільних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V\!A$ маємо

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp} \circ^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)\,(d) = (\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)))(d) =$$
$$= (\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P))(r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)) = P(r^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(r^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)) =$$
$$= P(r^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp} \bullet^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)).$$

Розпишемо детальніше множини пар імен (як це зроблено вище для операції реномінації).

Для кожних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V\!A$ тоді отримуємо:

$$\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp} \circ^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp}(P)(d) = P(r^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp} \bullet^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp}(d)).$$

Наведемо властивості розширеної реномінації, повязані з кванторами.

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

$\mathrm{NR}_\perp$) $\exists y\,\mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P)$ та

$\forall y\,\mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P)$ при умові $y \notin \{z,\overline{x}\}$.

Обмежені R∃-дистрибутивність та R∀-дистрибутивність:

$\mathrm{R}_\perp\exists$) $\exists y\,\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\exists yP)$ при $y \notin \{\overline{v},\overline{x},\overline{u}\}$;

$\mathrm{R}_\perp\forall$) $\forall y\,\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\forall yP)$ при $y \notin \{\overline{v},\overline{x},\overline{u}\}$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем (зауважимо, що тут маємо $x \notin \{\overline{u},\overline{w}\}$ згідно визначення реномінації):

$\mathrm{R}_\perp\exists$R) $\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(\exists xP) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists xP)$ та

$\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,\perp}(\exists xP) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists xP)$;

$\mathrm{R}_\perp\forall$R) $\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(\forall xP) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\forall xP)$ та

$\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,\perp}(\forall xP) = \mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\forall xP)$.

Теорема 1. Композиції $\mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ зберігають еквітонність предикатів.

Нехай $d_1 \supseteq d_2$ та P еквітонний. Із $d_1 \supseteq d_2$ отримуємо $r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_1) \subseteq r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_2)$, звідки за еквітонністю P маємо: якщо $P(r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_1))\downarrow$, то $P(r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_2))\downarrow= P(r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_1))$. Проте $\mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P)(d_1) = P(r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_1))$ та $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P)(d_2) = P(r_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(d_2))$, звідки маємо: якщо $\mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(P)(d_1)\downarrow$, то $\mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(P)(d_2)\downarrow = \mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(P)(d_1)$. Отже, якщо предикат P еквітонний, то предикат $\mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}P$ еквітонний.

2. Розширені квантори

Надалі вважаємо $d\in {}^VA$. Зауважимо, що замість $d\nabla x\mapsto a$ можна писати $d\,\|_{-x} + x\mapsto a$.

Введемо множини істинності та хибності предиката на даних, які не містять компоненти з іменем x. Це $T^{-x}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d\,\|_{-x}) = T\}$ та $F^{-x}(P) = \{d\in {}^VA \mid P(d\,\|_{-x}) = F\}$.

Враховуючи, що $r_{\perp}^{x}(d) = d\,\|_{-x}$, маємо

$T^{-x}(P) = \{d \mid P(r_{\perp}^{x}(d)) = T\} = \{d \mid \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)(d) = T\}$,

$F^{-x}(P) = \{d \mid P(r_{\perp}^{x}(d)) = F\} = \{d \mid \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)(d) = F\}$.

Таким чином, отримуємо

$T^{-x}(P) = \boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$; $F^{-x}(P) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$.

Введемо композиції розширеної квантифікації (розширені квантори) $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$, які враховують відсутність значення для квантифікованого імені.

Розширені квантори $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ задаємо так:

$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP) \cup T^{-x}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\exists xP) \cap F^{-x}(P)$;

$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\forall xP) \cap T^{-x}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP) \cup F^{-x}(P)$.

Звідси отримуємо такі визначення композицій $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$:

$\exists_\perp xP = \exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)$;

$\forall_\perp xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)$.

Отже, при наявності розширених реномінацій композиції $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ є *похідними*.

Твердження 3. Для $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ виконуються наступні співвідношення:

$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) \supseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$; $\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;
$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$; $\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) \supseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Приклад 1. Задамо еквітонний предикат Q так:

$$Q(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } x\in asn(d), \\ \text{невизначене, якщо } x\notin asn(d). \end{cases}$$

Тоді маємо $T^{-x}(Q) = \varnothing$, $F^{-x}(Q) = \varnothing$.

Звідси отримуємо:

$\boldsymbol{T}(\exists xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) = {}^VA$; $\boldsymbol{F}(\exists xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xQ) = \boldsymbol{T}(\exists xQ) \cup T^{-x}(Q) = {}^VA$;

$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xQ) = \boldsymbol{F}(\exists xQ) \cap F^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) \cap T^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) \cup F^{-x}(Q) = \varnothing$.

Тут маємо $\exists_\perp xQ = \exists xQ = \forall xQ = \mathrm{T}$; $\forall_\perp xQ = \perp$. Отже, $\forall_\perp xQ \neq \forall xQ$.

Приклад 2. Задамо предикат Q таким чином:

$$Q(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } x\in asn(d), \\ F, \text{ якщо } x\notin asn(d). \end{cases}$$

Тоді маємо $T^{-x}(Q) = \varnothing$, $F^{-x}(Q) = {}^VA$.

Звідси отримуємо:

$\boldsymbol{T}(\exists xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) = {}^VA$; $\boldsymbol{F}(\exists xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\exists_\perp xQ) = \boldsymbol{T}(\exists xQ) \cup T^{-x}(Q) = {}^VA$;

$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xQ) = \boldsymbol{F}(\exists xQ) \cap F^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{T}(\forall_\perp xQ) = \boldsymbol{T}(\forall xQ) \cap T^{-x}(Q) = \varnothing$;

$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xQ) = \boldsymbol{F}(\forall xQ) \cup F^{-x}(Q) = {}^VA$.

Отже, тут $\exists_\perp xQ = \exists xQ$; $\forall_\perp xQ = \neg\forall xQ$.

Твердження 4. Ім'я $x\in V$ строго неістотне для $\exists_\perp xP$ та $\forall_\perp xP$.

Справді, для довільних $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо:

$\exists_\perp xP(d\nabla x\mapsto a) = (\exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))(d\nabla x\mapsto a) =$
$= (\exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))(d\,\|\text{-}x) = \exists_\perp xP(d\,\|\text{-}x)$;

$\forall_\perp xP(d\nabla x\mapsto a) = (\forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))(d\nabla x\mapsto a) =$
$= (\forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))(d\,\|\text{-}x) = \forall_\perp xP(d\,\|\text{-}x)$.

Твердження 5. Композиції $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ зберігають еквітонність предикатів.

Справді, композиції $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ подаються через $\mathrm{R}_{\perp}^{x}$, $\exists x$, $\forall x$, $\vee$, &, а останні композиції зберігають еквітонність.

Теорема 2. Нехай предикат P еквітонний. Тоді:

1) $\boldsymbol{T}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP)$;
$\boldsymbol{F}(\exists_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

2) $\boldsymbol{T}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{T}(R_{\perp}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$;
$\boldsymbol{F}(\forall_\perp xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Нехай маємо $d \in \boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$, тоді $P(d\,\|_{-x}) = T$. За еквітонністю предиката P для кожного $d\in A$ тоді маємо $P(d\,\|_{-x} + x\mapsto a) = T$, що дає $d \in \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та

$d \in \boldsymbol{T}(\forall xP)$. Нехай $d \in \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$, тоді $P(d\|_{-x}) = F$. За еквітонністю предиката P для кожного $d \in A$ маємо $P(d\|_{-x} + x \mapsto a) = F$, що дає $d \in \boldsymbol{F}(\exists xP)$ та $d \in \boldsymbol{F}(\forall xP)$. Отже:

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ та $\boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\forall xP)$ та $\boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

Звідси отримуємо:

$\boldsymbol{T}(\exists_{\perp} xP) = \boldsymbol{T}(\exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) =$

$= \boldsymbol{T}(\exists xP) \cup \boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) = \boldsymbol{T}(\exists xP)$;

$\boldsymbol{F}(\exists_{\perp} xP) = \boldsymbol{F}(\exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) =$

$= \boldsymbol{F}(\exists xP) \cap \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) = \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$;

$\boldsymbol{T}(\forall_{\perp} xP) = \boldsymbol{T}(\forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) =$

$= \boldsymbol{T}(\forall xP) \cap \boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) = \boldsymbol{T}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$;

$\boldsymbol{F}(\forall_{\perp} xP) = \boldsymbol{F}(\forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) =$

$= \boldsymbol{F}(\forall xP) \cup \boldsymbol{F}(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)) = \boldsymbol{F}(\forall xP)$.

3. Спеціальні предикати-індикатори квантори

Це спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z.

Предикати-індикатори εz визначаємо [3, 4] так:

$\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}\!A \mid z \notin asn(d)\}$;

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}\!A \mid z \in asn(d)\}$.

Наведемо властивості предикатів εz, пов'язані з реномінаціями:

$\mathrm{R}_{\bar{y},u}^{\bar{x},z}(\varepsilon z) = \varepsilon u$; зокрема, $\mathrm{R}_{u}^{z}(\varepsilon z) = \varepsilon u$;

$\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{x}}(\varepsilon z) = \varepsilon z$, якщо $z \notin \{\bar{x}\}$;

зокрема, $\mathrm{R}_{y}^{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z$ та $\mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z$;

$\mathrm{R}_{\bar{y},\perp}^{\bar{x},z}(\varepsilon z) = \mathrm{T}$; зокрема, $\mathrm{R}_{\perp}^{z}(\varepsilon z) = \mathrm{T}$.

Наведемо властивості предикатів εz, пов'язані з композиціями квантифікації.

$\boldsymbol{T}(\exists y\, \varepsilon y) = \boldsymbol{T}(\forall y\, \varepsilon y) = \boldsymbol{F}(\exists y \neg\varepsilon y) = \boldsymbol{F}(\forall y \neg\varepsilon y) = \varnothing$;

$\boldsymbol{F}(\forall y\, \varepsilon y) = \boldsymbol{F}(\forall y\, \varepsilon y) = \boldsymbol{T}(\exists y \neg\varepsilon y) = \boldsymbol{T}(\forall y \neg\varepsilon y) = {}^{V}\!A$.

Таким чином:

$\exists y\, \varepsilon y = \mathrm{F}$, $\forall y\, \varepsilon y = \mathrm{F}$, $\exists y \neg\varepsilon y = \mathrm{T}$, $\forall y \neg\varepsilon y = \mathrm{T}$.

Зауважимо, що $\exists y\, \varepsilon y = \mathrm{F}$ та $\forall y \neg\varepsilon y = \mathrm{T}$ видаються не дуже природними.

Для випадку різних імен квантора та предиката-індикатора маємо:

$\exists x\, \varepsilon y = \forall x\, \varepsilon y = \varepsilon y$;

$\exists x \neg\varepsilon y = \forall x \neg\varepsilon y = \neg\varepsilon y$.

Твердження 6. Маємо такі властивості:

$\exists y(\varepsilon y \& P)) = \forall y(\varepsilon y \& P) = \mathrm{F}$;

$\exists y(\neg\varepsilon y \vee P) = \forall y(\neg\varepsilon y \vee P)) = \mathrm{T}$;

$\exists y(\varepsilon y \vee P) = \exists y(\neg\varepsilon y \& P) = \exists yP$;

$\forall y(\varepsilon y \vee P) = \forall y(\neg\varepsilon y \& P) = \forall yP$.

Для предикатів-індикаторів εx маємо:

$T^{-x}(\varepsilon x) = {}^{V}\!A$; $F^{-x}(\varepsilon x) = \varnothing$;

$T^{-x}(\neg\varepsilon x) = \varnothing$; $F^{-x}(\neg\varepsilon x) = {}^{V}\!A$.

Звідси отримуємо:

$\exists_{\perp} x\, \varepsilon z = \exists x\, \varepsilon z \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z \vee \varepsilon z = \varepsilon z$;

$\forall_{\perp} x\, \varepsilon z = \forall x\, \varepsilon z \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z \,\&\, \varepsilon z = \varepsilon z$;

$\exists_{\perp} x \neg\varepsilon z = \exists x \neg\varepsilon z \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon z) = \neg\varepsilon z \vee \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z$;

$\forall_{\perp} x \neg\varepsilon z = \forall x \neg\varepsilon z \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon z) = \neg\varepsilon z \,\&\, \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z$.

$\exists_{\perp} x\, \varepsilon x = \exists x\, \varepsilon x \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon x) = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$;

$\forall_{\perp} x\, \varepsilon x = \forall x\, \varepsilon x \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon x) = \mathrm{F} \,\&\, \mathrm{T} = \mathrm{F}$;

$\exists_{\perp} x \neg\varepsilon x = \exists x \neg\varepsilon x \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon x) = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{T}$;

$\forall_{\perp} x \neg\varepsilon x = \forall x \neg\varepsilon x \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon x) = \mathrm{T} \,\&\, \mathrm{F} = \mathrm{F}$.

Отже, маємо такі співвідношення:

$\exists_{\perp} x\, \varepsilon x = \neg\exists x\, \varepsilon x$; $\forall_{\perp} x\, \varepsilon x = \forall x\, \varepsilon x$;

$\exists_{\perp} x \neg\varepsilon x = \exists x \neg\varepsilon x$; $\forall_{\perp} x \neg\varepsilon x = \neg\forall x \neg\varepsilon x$.

Зауважимо, що згідно твердження 6, $\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)$ не можна подати в жодному із наступних виглядів:

$\exists z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \vee \varepsilon z)$, $\exists z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \vee \neg\varepsilon z)$,

$\exists z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \,\&\, \varepsilon z)$, $\exists z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \,\&\, \neg\varepsilon z)$,

$\forall z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \vee \varepsilon z)$, $\forall z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \vee \neg\varepsilon z)$,

$\forall z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \,\&\, \varepsilon z)$, $\forall z(\mathrm{R}_{z}^{x}(P) \,\&\, \neg\varepsilon z)$.

4. Властивості розширених кванторів

Основні властивості композицій $\exists_{\perp} x$ та $\forall_{\perp} x$ аналогічні відповідним властивостям традиційних композицій $\exists x$ та $\forall x$.

Теорема 3. Для $\exists_{\perp} x$ та $\forall_{\perp} x$ виконуються наступні співвідношення:

1) комутативність однотипних кванторів
$\exists_{\perp} x \exists_{\perp} yP = \exists_{\perp} y \exists_{\perp} xP$ та $\forall_{\perp} x \forall_{\perp} yP = \forall_{\perp} y \forall_{\perp} xP$;

2) закони де Моргана
$\neg\exists_{\perp} xP = \forall_{\perp} x \neg P$ та $\neg\forall_{\perp} xP = \exists_{\perp} x \neg P$;

3) неістотність квантифікованих імен
$\exists_{\perp} x \exists_{\perp} xP = \exists_{\perp} xP$; $\exists_{\perp} x \forall_{\perp} xP = \forall_{\perp} xP$;
$\forall_{\perp} x \exists_{\perp} xP = \exists_{\perp} xP$; $\forall_{\perp} x \forall_{\perp} xP = \forall_{\perp} xP$;

4) дистрибутивність кванторів щодо $\vee$ та &:
$\exists_{\perp} xP \vee \exists_{\perp} xQ = \exists_{\perp} x(P \vee Q)$ та
$\forall_{\perp} xP \,\&\, \forall_{\perp} xQ = \forall_{\perp} x(P \& Q)$.

Розглянемо тепер властивості $\exists_{\perp} x$ та $\forall_{\perp}$, пов'язані з розширеною реномінацією.

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

$\mathrm{N}_{\perp}\mathrm{R}_{\perp}$) $\exists_{\perp} y\, \mathrm{R}_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(P) = \mathrm{R}_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(P)$ та

$\forall_{\perp} y\, \mathrm{R}_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(P) = \mathrm{R}_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(P)$ за умови $y \notin \{z, \bar{x}\}$.

За $NR_\perp$ маємо $\exists y\, R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P)$. Тоді:

$$\exists_\perp y\, R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = \exists y\, R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) \vee R^{y}_{\perp}(R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P)) =$$
$$= \exists y\, R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) \vee R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) \vee R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) =$$
$$= R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P).$$

Аналогічно доводимо, що
$\forall_\perp y\, R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P)$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем:

$R_\perp\exists_\perp R$) $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_\perp xP)$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_\perp xP)$;

$R_\perp\forall_\perp R$) $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\forall_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\forall_\perp xP)$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\forall_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\forall_\perp xP)$

(тут $x \notin \{\bar{u}, \bar{w}\}$ згідно визначення реномінації).

Згідно $R_\perp\exists R$ маємо $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)$. Тоді:

$$R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xP \vee R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(P) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(P);$$
$$R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists xP \vee R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(R^{x}_{\perp}(P)) =$$
$$= R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(P) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(P).$$

Водночас $R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_\perp xP \vee R^{x}_{\perp}(P)) =$
$= R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(R^{x}_{\perp}(P)) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP) \vee R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(P)$.

Отже, $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_\perp xP)$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists_\perp xP)$.

Аналогічно доводимо
$R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\forall_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\forall_\perp xP)$ та
$R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\forall_\perp xP) = R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\forall_\perp xP)$.

Обмежені $R\exists$-дистрибутивність та $R\forall$-дистрибутивність для розширених кванторів записуються так, як і для традиційних кванторів:

за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}, \bar{u}\}$ маємо

$R_\perp\exists_\perp$) $\exists y_\perp R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists_\perp yP)$;

$R_\perp\forall_\perp$) $\forall_\perp y\, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\forall_\perp yP)$.

Згідно $R_\perp\exists$ маємо $\exists y\, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP)$.

Тоді: $\exists y_\perp R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = \exists y\, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) \vee R^{y}_{\perp}(R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)) =$
$= \exists y\, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) \vee R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{x},\perp,\perp}(P) = R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP) \vee R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{x},\perp,\perp}(P) =$
$= R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP) \vee R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(R^{y}_{\perp}(P) = R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP \vee R^{y}_{\perp}(P)) =$
$= R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists_\perp yP)$.

Аналогічно доводимо, що
$\forall_\perp y\, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\forall_\perp yP)$.

5. Семантичні властивості формул мови логік з розширеними реномінаціями.

Семантичними моделями ЧКНЛРР є композиційні системи квазіарних предикатів вигляду $({}^{V}A, Pr^{A}, C)$, де C задається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$, $\exists x$. Кожна така композиційна система задає алгебру даних (A, Pr^{A}) та композиційну алгебру предикатів (Pr^{A}, C). Терми композиційної алгебри (Pr^{A}, C) трактуємо як формули мови ЧКНЛРР.

Рівень ЧКНЛРР можна трактувати як підрівень кванторного [1] рівня, тобто рівня ЧКНЛ. З формального погляду мова ЧКНЛРР відрізняється від мови ЧКНЛ лише дещо відмінними параметрами (парами імен) символів реномінації (нижнім іменем може бути спеціальний символ $\perp$).

Визначення формули та відображення інтерпретації задаються аналогічно випадку традиційних ЧКНЛ. Те саме стосується визначень істинної (неспростовної) формули, виконуваної формули, тавтології, відношень тавтологічного наслідку, логічного наслідку, слабкого логічного наслідку, тавтологічної еквівалентності, логічної еквівалентності, строгої логічної еквівалентності.

Для ЧКНЛРР справджується теорема еквівалентності, вона формулюється у двох формах – для відношення логічної еквівалентності $\sim$ та відношення строгої логічної еквівалентності $\sim_{TF}$.

Теорема 4. Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень підформул $\Phi_1,..., \Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$.

Теорема 5. Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень підформул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_{TF} \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi \sim_{TF} \Phi'$.

Специфічні властивості формул ЧКНЛРР пов'язані з композиціями розширеної реномінації. Вони відображають наведені вище відповідні властивості цих композицій.

Враховуючи, що в цілому властивості композицій $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ аналогічні відповідним властивостям композицій $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, зберігаємо для таких властивостей аналогічні назви.

R$_\perp$T) $R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$;

R$_\perp\neg$) $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)$;

R$_\perp\vee$) $R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi)$.

Подібним чином для розширеної реномінації записуємо R$_\perp\to$, R$_\perp$&, R$_\perp\leftrightarrow$.

R$_\perp$R) $R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp} \circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)$.

NR$_\perp$) $\exists y R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi)$ та $\forall y R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi)$ за умови $y \notin \{z, \bar x\}$.

R$_\perp\exists$) $\exists y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$.

R$_\perp\forall$) $\forall y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\forall y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$.

R$_\perp\exists$R) $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists x\Phi)$.

R$_\perp\forall$R) $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\forall x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\forall x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall x\Phi)$.

За допомогою розширених реномінацій можна визначити композиції розширеної квантифікації $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$ як похідні. Тоді трактуємо:

$\exists_\perp x\,\Phi$ – як скорочення для $\exists x\Phi \vee \mathrm{R}^x_\perp\Phi$;

$\forall_\perp x\,\Phi$ – як скорочення для $\forall x\Phi \,\&\, \mathrm{R}^x_\perp\Phi$.

Вводячи до розгляду $\exists_\perp x$ та $\forall_\perp x$, отримуємо такі властивості:

Теорема 6. 1) $\exists_\perp x\exists_\perp y\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp y\exists_\perp x\,\Phi$ та $\forall_\perp x\forall_\perp y\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp y\forall_\perp x\,\Phi$;

2) $\neg\exists_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp x\neg\Phi$ та $\neg\forall_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp x\neg\Phi$;

3) $\exists_\perp x\exists_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp x\,\Phi$; $\exists_\perp x\forall_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp x\,\Phi$; $\forall_\perp x\exists_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \exists_\perp x\,\Phi$; $\forall_\perp x\forall_\perp x\,\Phi \sim_{TF} \forall_\perp x\,\Phi$;

4) $\exists_\perp x\,\Phi \vee \exists_\perp x\,\Psi \sim_{TF} \exists_\perp x\,(\Phi\vee\Psi)$ та $\forall_\perp x\,\Phi \,\&\, \forall_\perp x\,\Psi \sim_{TF} \forall_\perp x\,(\Phi\&\Psi)$.

Додаючи розширені реномінації, маємо такі властивості:

N$_\perp$R$_\perp$) $\exists_\perp y\,\mathrm{R}^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)$ та $\forall_\perp y\,\mathrm{R}^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P)$ за умови $y \notin \{z, \bar x\}$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем (тут $x \notin \{\bar u, \bar w\}$ згідно визначення реномінації):

R$_\perp\exists_\perp$R) $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\exists_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\exists_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\exists_\perp x\Phi)$;

R$_\perp\forall_\perp$R) $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,y}(\forall_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp x\Phi)$ та $R^{\bar u,\bar w,x}_{\bar v,\perp,\perp}(\forall_\perp x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u,\bar w}_{\bar v,\perp}(\forall_\perp x\Phi)$;

R$_\perp\exists_\perp$) $\exists_\perp y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\exists_\perp y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$;

R$_\perp\forall_\perp$) $\forall_\perp y R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\forall_\perp y\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar v, \bar x, \bar u\}$.

Висновки

В роботі запропоновано нові класи композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів. Характерною їх особливістю є використання композицій розширеної реномінації (перейменування), які дають змогу в явному вигляді задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. За допомогою композицій розширеної реномінації визначено композиції розширеної квантифікації (розширені квантори). Описано основні семантичні властивості чистих першопорядкових логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями і кванторами.

Проведене дослідження планується продовжити в плані вивчення властивостей відношення логічного наслідку для множин формул та побудови числень секвенційного типу.

Список використаних джерел

1. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak S.S.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
2. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak S.S.* First-Order Composition-Nominative Logics // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – №4. – P. 176–185 (in Ukrainian).
3. *Nikitchenko M.S.*, *Shkilniak S.S.* Special Sequent Calculi of Pure First-order Composition-nominative Logics// Visnyk, Ser. Kibernetyka, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – V. 12. – P. 38–45 (in Ukrainian).
4. *Nikitchenko M.*, *Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89–110.

Надійшла до редколегії 15.03.2013