УДК 519.852:519.876

Тодоріко Б.Д.[1], аспірант

Аналіз особливостей двоїстої задачі лінійного програмування матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць

Проаналізовано властивості двоїстої задачі лінійного програмування, як матричної гри у змішаних стратегіях. Застосовано положення методу базисних матриць при встановленні властивостей чистих стратегій (рядків)- платіжної матриці.

Ключові слова: базисна матриця, оптимальна стратегія, оптимальний розв‘язок, змішана стратегія.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: t1to@list.ru

B.D.Todorico[1], postgraduate student

The analysis of matrix game with mix strategies how dual linear programming problems with application methods of basic matrix

Analysis of matrix game with mix strategies as dual linear programming problems of basic matrix methods is research.

Key Words:basic matrix, optimal solution, optimal strategy, mix strategy .

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: t1to@list.ru

Статтю представив д.т.н., п.н.с. Кудін В.І.

Вступ.

Одним з напрямкім дослідження матричної гри у змішаних стратегіях опирається на аналізі спеціальним чином побудованої двоїстої пари задач лінійного програмування [1-5]. Як “рішатель” даної задачі, найчастіше обирають сімплекс методи, що застосовані до прямої або до двоїстої задачі (“стовпцеві” [5,6] та “порядкові” [7] схеми). При проведенні її аналізу доцільно застосовувати як “стовпцеві” [5,6] (метод покращення плану) так “порядкові” (метод базисних матриць) [7] схеми. Це обумовлено тим, що при застосуванні перщі дають інформацію про стовпці, а інші про рядки матриці обмежень, тобто про стратегії ігроків матричної гри.

В даній роботі досліджено структурні властивості двоїстої задачі (матричної гри) та застосовано ідеологію “стовпцевих” та “рядкових” методів при аналізі властивостей платіжної матриці (стратегій ігроків)

Постановка задачі.

Введемо в розгляд двоїсту пару задач лінійного програмування [1-5], де *пряма задача*:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \tag{1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \tag{3}$$

де $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)−(3) має матрицю обмежень A в якій кількість стовпців більш ніж рядків (“довга”).

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \ , \qquad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ .... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (5)$$

$$u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (6)$$

Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4],

де $b_i = 1, \ i = \overline{1,m}, \ c_j = 1, \ j = \overline{1,n}$..

Пасивність та неактивність обмежень двоїстої задачі лінійного програмування (4)-(5).

Нехай

$$U = \{ \ u / a_j u^T \le c_j, \quad j \in J \ \},$$

$$U_r = \{ u / a_j u^T \le c_j, \quad j \in J, \quad J \ne r \ \}$$

$$U^0 = \{ u_0 / B u_0^T = \max_{u \in U} B u^T, u \in U \}$$

$$U_r^0 = \{ u_0 / B u_0^T = \max_{u \in U_r} B u^T, u \in U_r \} .$$

Означення 1. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ задачі (4)-(6) пасивне, якщо $U = U_r$.

Означення 2. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Означення 3. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ оптимально-активне, якщо $U^0 \ne U_r^0$.

Через $A^0_{б(k)}$ позначимо матрицю, яка отримується із базисної матриці $A_б$ (що відповідає базисному розв'язку u_0 задачі (4),(5)) заміною рядка, що займає k-у позицію нормаллю цільової функції, взятої з протилежним знаком, тобто $(-B)$.

Означення 4. Матрицю B_k^0 будемо називати оптимально базисною, якщо існує обернена до неї $(A^0_{б(k)})^{-1}$, $A^0_{б(k)} \cdot u_0^T = d_0$, де $d_0 = (c_1^0, ..., c_{k-1}, -B u_0^T, c_{k+1}^0, ..., c_m^0)$

Теорема 1. (друга теорема двоїстості для симетричних задач або з однотипними обмеженнями [5]). Для того, щоб плани X^* та U^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m} .$$

Очевидніший взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок 1. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна *i*-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо *i*-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна (при стовпцю A_i), то відповідне *i*-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Наслідок 2. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність (пасивне), то відповідна *i*-та компонента оптимального плану (відповідна стовпцю A_i) спряженої задачі дорівнює нулю.

Оскільки оптимальні стратегії матричної гри визначаються через компоненти розв‘язки задач (1)-(3) та (4)-(6) [1-3], а саме, складові оптимальних стратегій $u_i^{'}$ та $w_i^{'}$ ігри пов'язані з компонентами u_i та x_j оптимальних планів двоїстих задач лінійного програмування формулами

$$w_j^{'} = x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j \ , \ u_i^{'} = u_i / \sum_{i=1}^{m} u_i \ .$$

Наведені вище умови пасивності обмежень (5) тісно пов‘язані з категорією суттєвості чистої стратегії матричної гри.

Наслідок 3. Якщо в результаті аналізу однієї із задач (прямої чи двоїстої) в системі обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність (пасивне або неактивне), то відповідна і-у стовпцю (стратегія) платіжної матриці спряженої задачі несуттєва.

Означення 4. Чиста стратегія $e_k = \left(\underbrace{\overbrace{0,0,...,0,1}^{k},0,...0}_{m} \right)$ першого гравця називається *істотною (суттєвою)*, якщо існує така оптимальна змішана стратегія $u' = \left(u_1, u_2, ..., u_{k-1}, \underbrace{u_k}_{k}, u_{k+1}, ..., u_m \right)$, в якій k-а її складова u_k додатня.

В іншому випадку стратегія e_k *неістотна (несуттєва)*.

Аналогічно визначаються суттєві і несуттєві стратегії другого гравця.

Мають місце такі властивості оптимальних стратегій матричної гри:

Чиста стратегія e_k гравця є суттєвою в тому і тільки в тому випадку, якщо на ній досягається ціна гри при довільній оптимальній стратегії противника. Іншими словами, необхідною і достатньою умовою того, щоб чиста стратегія e_k першого гравця була суттєвою, є виконання рівності $e_k A w = v$ для всіх оптимальних стратегій другого гравця, де v ціна ігри.

Якщо стратегія e_k не є істотною, то завжди знайдеться оптимальна стратегія w' другого гравця, яка гарантує строгу нерівність $e_k A w < v$

Це вказує на потребу проведення аналізу структурних властивостей системи обмежень (4)-(6) задачі. Наприклад, для розв'язування задачі симплексним методом [5-6] необхідно звести задачі до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач необхідно ввести n невід'ємних змінних.

Для розв'язання задачі (без додаткових перетворень) можна також застосувати метод базисних матриць як до задачі з однотипними обмеженнями [7]. Для цього випадку будемо розглядати як базову задачу лінійного програмування з однотипними обмеженнями (4)-(6) на "$\le$" та на "max" з використанням методу базисних матриць. Зв'язок умов оптимальності, формул зв'язків елементів методу (методів) поміж задачами з різною формою запису, типом обмежень, напрямком оптимізації умовами пасивності (неактивності) рядків одної з задач та стовпців двоїстої можна встановити на основі теорем двоїстості, що наведені вище.

Означення 5. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (5), будемо називати базисною, а розв′язок відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$ базисним. Дві базисні матриці з відмінними одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай β_{ij}, $1, j = 1, 2, ..., m$, елементи базисної підматриці $A_б$, $e_{ri,}$ - елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- стовпець оберненої матриці. Розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ системи рівнянь $A_б u = c^0$, де c^0 - підвектор C - компоненти якого складаються з правих частин обмежень (5), нормалі, яких утворюють базисну матрицю $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розвинення нормалі обмеження $a_r u_1 \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками базисної матриці $A_б$, . $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5) в вершині u_0; $J_б, J_H$, $J = J_б \cup J_H$ - множини індексів базисних і небазисних обмежень (5).

Теорема 2 (Критерій пасивності). Для того, щоб обмеження $a_r u \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування базисної матриці, $A_б$ відносно якої розвинення $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх k.

Теорема 3 (Критерій не активності обмеження). Для того щоб $a_r u \le c_r$ обмеження було не активним для (5) необхідно і достатньо, щоб існувала оптимально базисна матриця $A^0_{б(k)}, k = \overline{1,m}$, відносно якої, $\alpha_{ri} \ge 0$ для всіх і.

Про структурні властивості задачі (4)-(6).

Двоїста задача вигляду (4)-(6) (задача на мінімум) має свої особливості структури, що визначають можливості застосування алгоритмів та їх ефективність.

Твердження 1. Множина точок з координатами $u_{j(H)} = \underbrace{(0, 0, ..., \underbrace{\lambda_{j(B)}}_{j}, 0, ..., 0)}_{m}$, $j \in I$,

де $\lambda_{j(B)} = \max\limits_{\substack{a_{ij} > 0, \\ i \in I}} \frac{1}{a_{ij}}$, $j \in I$ є допустимими для (5).

Доведення. Розглянемо додатні координатні осі множини обмежень в E^m, тобто промені, які можна представити у вигляді $OU_j = \left\{ \begin{array}{l} u = (u_1, u_2, ..., u_m) / u_i = 0, i \neq j, \\ u_j = \lambda_j, 0 < \lambda_j < +\infty, i = j \end{array} \right\}$.

Найдемо перетин кожної з гіперплощин обмежень (невід‘ємних півпросторів) з OU_j, $j \in I$ (опуклих множин). Підставимо кординати точок променя OU_j, $j \in I$ в рівняння гіперплощини відповідній

$a_i u \geq c_i$, $i \in I$, $a_i u = c_i$, $i \in I$,

$a_i u = 1$, $i \in I$, $\lambda_{j(i)} = 1 / a_{ij}$, $i \in I$,

Відрізок $\left[\lambda_{j(i)}, \infty \right]$ допустимий для $a_i u \geq c_i$, $i \in I$. Знайдемо перетин відрізків, тобто відрізок $\left[\lambda_{j(B)}, \infty \right]$, $\lambda_{j(B)} = \max_{i \in I} \lambda_{j(i)}$. Точки з координатами $u_{j(B)} = (0, 0, ..., \lambda_{j(B)}, 0, ..., 0)$, $j \in I$ будуть допустимими для всіх обмежень.

Наслідок 4. Точки простору E^m : $u_{j(B)} = (0, 0, ..., \lambda_{j(B)}, 0, ..., 0)$, $j \in I$ є допустимими для (4)-(6), а точка $u_{d(B)} = (0, 0, ..., \lambda_{d(B)}, 0, ..., 0)$, $\lambda_{d(B)} = \min_{j \in J} \lambda_{j(B)}$ нижньою допустимою оцінкою за цільової функції (4) задачі (4)-(5), тобто оптимальні значення $Bu \leq Bu_{d(B)}$.

Доведення цього факту є очевидне, якщо врахувати властивість цільової функції (4) (координати вектора одиничні) та додатність компонент ($Bu_{d(B)} = \lambda_{d(B)}$).

Наслідок 5. Множина точок простору E^m, що подається в наступному вигляді $U_d = \left\{ u \in E^m / u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_J u_{j(B)}, \ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\}$ є допустимою для (4).

Наслідок 6. Нижня допустима границя значень цільової функції (1.4) визначається із співвідношення

$$u_{d(B)} = \arg\min\left(Bu_{j(B)}, \ j \in I \right),$$

$$F_{u(H)} = Bu_{d(H)} = \min\left(Bu_{j(H)}, \ j \in I \right)$$

Наслідок 7. Множини (області) оптимальних значень задачі (4)-(5) та задачі (4)-(5) з додатковим обмеженням на цільову функцію у вигляді $Bu \leq Bu_{d(B)} \left(-Bu \geq -Bu_{d(B)} \right)$ співпадають. Обмеження (стовпці) пасивні (несуттєві) для даної множини будуть неактивними для (4)-(5).

За властивістю пасивності обмежень (4)-(6) можна зробити висновок про властивості стовпців прямої задачі (відповідні стовпці будуть пасивними), а відповідна змінна буде набувати лише нульових значень. Це буде вказувати також і на статус відповідної чистої стратегії матричної гри.

Висновок.

Врахування структурних властивостей обмежень задачі (4)-(6) таких як двосторонні оцінки розв‘язків за цільовою функцією дозволяє: побудувати двосторонні оцінки значень змінних (та цільової функції (4)) , локалізувати область належності оптимальних значень, додатково ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження (стовпці), застосовувати другу теорему двоїстості (про умови доповнюючої нежорсткості) для виявлення суттєвих та несуттєвих стратегій.

Список використаних джерел

1. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* New directions in linear programming. − M. − Sovetskoe radio, 1969, − 524p. (in Russian).
2. *Dantzig G.B* Linear programming and application. M.: Progress, 1966. (in Russian).
3. *Dantzig G.B., Thapa M.N.* Linear Programming 1: introduction, Springer, 1997, − 435p.
4. *Dantzig G.B. Dikin's* Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, − 1988.
5. *Golshteyn E.G., Yudin D.B.* Linear programming/.Theory and methods. −M.: Nauka, 1963. – 776p. (in Russian).
6. *Leon S. Lasdon* . Optimization theory for large System. − M.: Nauka, 1975. – 430p. (in Russian).
7. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. 2007. — N 4. —.P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.03.13