УДК 512.53

Євгенія Кочубінська[1], к. ф.-м. н., асистент

Максимальні нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи часткових автоморфізмів кореневого дерева

Дано опис максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи часткових автормор-фізмів кореневого дерева.

Ключові слова: кореневе дерево, частковий автоморфізм, максимальна піднапівгрупа.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Eugenia Kochubinska[1], Ph.D., Assistant Prof.

Maximal nilpotent subsemigroups of semigroup of partial automorphisms of rooted tree

The description of maximal nilpotent subsemigroups of semigroup of partial automorphisms of rooted tree is given.

Keywords: rooted tree, partial automorphism, maximal subsemigroup.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail: eugenia@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. В.В.Кириченко

1 Вступ

Нільпотентні піднапівгрупи — один з природних об'єктів, який вивчається при дослідження будь-якої напівгрупи. Однією з причин є те, що серед скінченних напівгруп є величезна кількість нільпотентних. У статті дано опис максимальних піднапівгруп напівгрупи часткових автоморфізмів скінченного кореневого регулярного дерева. Також знайдено кількості та потужності таких піднапівгруп, варто зауважити, що тут з'являються відомі комбінаторні об'єкти, такі, як числа Стірлінга другого роду, многочлени Белла тощо.

2 Вінцевий добуток напівгруп

Нехай T — кореневе k-рівневе n-регулярне дерево.

Нехай $\mathrm{PAut}\, T$ — це напівгрупа часткових автоморфізмів дерева T, які визначені на зв'язному підграфі, який містить кореневу вершину дерева T, і які зберігають рівні вершин. Напівгрупа $\mathrm{PAut}\, T$ є інверсною напівгрупою.

Для напівгрупи S визначимо множину S^{PX} наступним чином

$$S^{PX} = \{f : \mathrm{dom}(f) \subseteq X \to S\}.$$

Для відображень $f, g \in S^{PX}$ задамо добуток fg за правилом:

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$x \in \mathrm{dom}(fg) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g).$$

Якщо $a \in \mathcal{IS}(X), f \in S^{PX}$, то визначимо f^a як

$$(f^a)(x) = f(x^a)$$

$$x \in \mathrm{dom}(f^a) = \mathrm{dom}(a) \cap \{x : x^a \in \mathrm{dom}(f)\}$$

Частковим вінцевим добутком напівгрупи S з напівгрупою (P, X) часткових перетворень множини X називається множина

$$\{(f, a) \in S^{PX} \times (P, X) \,|\, \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(a)\}$$

разом з операцією множення $(f, a) \cdot (g, b) = (fg^a, ab)$.

Частковий вінцевий добуток напівгруп є напівгрупою. Більше того, частковий вінцевий добуток інверсних напівгруп є інверсною напівгрупою.

Теорема 1. [2] *Нехай T — кореневе n-регулярне k-рівневе дерево. Тоді*

$$\mathrm{PAut}\, T \simeq \underbrace{\mathcal{IS}_n \wr_p \ldots \wr_p \mathcal{IS}_n}_{k} = \wr_p^k \mathcal{IS}_n.$$

3 Нільпотентні піднапівгрупи в $\mathcal{IS}_n$

У цьому підрозділі зберемо результати, що стосуються нільпотентних піднапівгруп симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$, одержані в [1], які потім будуть корисними для опису нільпотентних піднапівгруп вінцевих добутків симетричних інверсних напівгруп.

Нехай S — напівгрупа з нулем 0. Елемент $a \in S$ називається *нільпотентним*, якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ виконується $a^k = 0$

Напівгрупа S називається *нільпотентною*, якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = 0$ для довільних $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$. Зауважимо, що скінченна напівгрупа є нільпотентною тоді і лише тоді, коли кожний її елемент є нільпотентним.

Розрізняють два типи нільпотентних піднапівгруп. До першого типу відносяться ті нільпотентні піднапівгрупи, які містять нуль 0 напівгрупи S. У цьому випадку для нільпотентної піднапівгрупи $T \subset S$ маємо $T^k = \{0\}$ для деякого $k > 0$.

До другого — ті піднапівгрупи, які самі є нільпотентними, але їхній нульовий елемент відрізняється від напівгрупового нуля. У цьому разі для нільпотентної піднапівгрупи $T \subset S$ матимемо, що $T^k = \{e\}$ для деякого ідемпотента $e \neq \mathrm{id}$ і деякого $k \geqslant 1$. Такі напівгрупи називатимемо *власними* нільпотентними піднапівгрупами.

Нільпотентна піднапівгрупа $T \subset S$ називається *максимальною нільпотентною піднапівгрупою*, якщо вона не міститься в жодній іншій нільпотентній піднапівгрупі $T' \subset S$, $T \neq T'$.

Для напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ існує бієктивна відповідність між максимальними нільпотентними піднапівгрупами та розбиттями множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ в диз'юнктне об'єднання впорядкованих блоків.

Якщо e — ідемпотент, який є нульовим елементом піднапівгрупи $T \subset \mathcal{IS}_n$, а доповнення до області визначення має складається з елементів $\overline{\mathrm{dom}(e)} = \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$, тоді кожній максимальній нільпотентній піднапівгрупі зіставляється підстановка $b_1, b_2, \ldots, b_k$ елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, яка має вигляд:

$$T = \Big\{\sigma \in \mathcal{IS}_n \,|\, \mathrm{dom}(e) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma);$$
$$\sigma(x) = x \text{ для всіх } x \in \mathrm{dom}(e);$$
$$\text{з } \sigma(b_i) = b_j \text{ випливає } i < j \quad \forall\, b_i \notin \mathrm{dom}(e)\Big\}.$$

3.1 Нільпотентні піднапівгрупи часткового вінцевого добутку симетричних інверсних напівгруп

Розглянемо максимальні нільпотентні піднапівгрупи (ті, які містять напівгруповий нуль) у більш загальному випадку.

Нехай P — інверсна напівгрупа.

Лема 1. *Елемент $(f, a) \in P \wr_p \mathcal{IS}_n$ буде нільпотентним тоді і лише тоді, коли $a \in \mathcal{IS}_n$ є нільпотентним.*

Доведення. Нехай $(f, a) \in \wr_p^k \mathcal{IS}_n$ — нільпотентний елемент степеня m, тобто $(f, a)^m = (\tilde{f}, a^m) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Звідси випливає, що a — нільпотентний елемент напівгрупи $\mathcal{IS}_n$.

Нехай тепер a — нільпотентний елемент напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ степеня m. Тоді $\mathrm{dom}(a^m) = \varnothing$, а оскільки $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(a)$, то для елемента $(f, a)^m = (\tilde{f}, a^m)$ область значення $\mathrm{dom}(\widetilde{f}) = \varnothing$. Тому $(f, a)^m = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. □

Опис нільпотентних елементів напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ міститься в [1].

Теорема 2. *Нехай S — максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{IS}_n$. Тоді напівгрупа $P \wr_p S$ буде максимальною нільпотентною піднапівгрупою напівгрупи $P \wr_p \mathcal{IS}_n$. Більше того, кожна максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $P \wr_p \mathcal{IS}_n$ має такий вигляд.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що $(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$ є напівгрупою. За лемою 1 кожний елемент цієї напівгрупи є нільпотентним, а оскільки напівгрупа скінченна, то вона є нільпотентною. З максимальності S випливає максимальність напівгрупи $(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$.

Нехай M — максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\wr_p^k \mathcal{IS}_n$. Визначимо $S = \{a \in \mathcal{IS}_n \mid (f, a) \in M\}$. Тоді $M \subset \left(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n\right) \wr_p S$. З іншого боку, S є нільпотентною піднапівгрупою напівгрупи $\mathcal{IS}_n$. Тоді з максимальності M випливає, що $M = \left(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n\right) \wr_p S$. Припустимо, що $S \subset \mathcal{IS}_n$ не є максимальною нільпотентною піднапівгрупою. Але тоді для будь-якої нільпотентної напівгрупи $S_1 \supset S$ вірно, що $M \subset \left(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n\right) \wr_p S_1$, що суперечить умові максимальності M. □

Наслідок 1. *Максимальними нільпотентними піднапівгрупами напівгрупи* $\wr_p^k \mathcal{IS}_n$ *є напівгрупи вигляду* $(\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n) \wr_p S$*, де* S *— максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи* $\mathcal{IS}_n$.

Розглянемо тепер максимальні власні нільпотентні піднапівгрупи.

Нехай $\mathcal{M}$ — це власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$. Позначимо через T_x максимальне піддерево дерева T, таке, що його коренем є вершина $x \in VT$, а жодне з ребер дерева T_x не належить $\mathrm{dom}(e)$.

Наступне твердження містить повний опис максимальних власних піднапівгруп напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T_x$.

Теорема 3. *Нехай* T *—* k*-рівневе* n*-регулярне кореневе дерево. Максимальна власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи* $\mathrm{PAut}\, T$ *з нулем* $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$ *(канонічно) ізоморфна напівгрупі*

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x,$$

де M_x *позначає максимальну нільпотентну піднапівгрупу напівгрупи* $\mathrm{PAut}\, T_x$.

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — максимальна власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$ і нехай її степінь нільпотентності дорівнює k. Розглянемо відображення $\varphi : \mathcal{M} \to \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} \mathrm{PAut}\, T_x$, задане як $a \mapsto (a|_{T_x}, x \in \mathrm{dom}(e))$. Оскільки будь-який частковий автоморфізм $a \in \mathcal{M}$ діє тотожно на $\mathrm{dom}(e)$, то для кожного $x \in \mathrm{dom}(e)$ $a(T_x) \subset T_x$, а тому з задання φ маємо, що це відображення є гомоморфізмом.

Відображення φ також є мономорфізмом, бо для довільної вершини $v \in \mathrm{dom}(e)$ виконується $a(v) = a|_{\mathrm{dom}(e)} = b|_{\mathrm{dom}(e)} = v$. Якщо ж $v \notin \mathrm{dom}(e)$, то знайдеться така вершина $x \in \mathrm{dom}(e)$, що $v \in T_x$, з умови $\varphi(a) = \varphi(b)$ випливає, що для кожної вершини $v \in T_x$ $a|_{T_x}(v) = b|_{T_x}(v)$. Отже, з рівності $\varphi(a) = \varphi(b)$ випливає рівність $a = b$.

Позначимо $M_x = \{a|_{T_x} \mid a \in \mathcal{M}\}$. Якщо $a^k = e$, то $a^k|_{T_x} = e|_{T_x} = \mathrm{id}_{\{x\}}$, а $\mathrm{id}_{\{x\}}$ є нулем в $\mathrm{PAut}\, T_x$. Отже, M_x — нільпотентна піднапівгрупа $\mathrm{PAut}\, T_x$ для всіх $x \in \mathrm{dom}(e)$.

Покажемо, що M_x є максимальною нільпотентною піднапівгрупою для кожної вершини $x \in \mathrm{dom}(e)$. Припустимо, що це не так. Нехай існує така вершина $y \in \mathrm{dom}(e)$, що M_y не є максимальною нільпотентною піднапівгрупою в $\mathrm{PAut}\, T_y$. Нехай $M' \in \mathrm{PAut}\, T_y$ — така нільпотентна піднапівгрупа степеня m напівгрупи, що $M_y \subset M'$. Розглянемо напівгрупу

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' = \big\{& a \in \mathrm{PAut}\, T \mid a|_{\mathrm{dom}(e)} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(e)},\\ & \forall x \in \mathrm{dom}(e), x \neq y, \exists\, b \in \mathcal{M} : a|_{T_x} = b|_{T_x},\\ & a|_{T_y} \in M' \big\}.\end{aligned}$$

Зрозуміло, що $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$. Покажемо, що $\mathcal{M}'$ є власною нільпотентною піднапівгрупою з нулем e. Візьмемо деякий частковий автоморфізм $a \in \mathcal{M}'$. Тоді для всіх $x \in \mathrm{dom}(e)$, крім $x = y$, маємо $(a|_{T_x})^n = (b|_{T_x})^n = \mathrm{id}_{\{x\}}$, що є нулем в $\mathrm{PAut}\, T_x$, $a|_{\mathrm{dom}(e)} = e$, а для вершини y маємо $(a|_{T_y})^m = \mathrm{id}_{\{y\}}$, що є нулем в $\mathrm{PAut}\, T_y$. Таким чином $a^{m \vee k} = e$ в $\mathcal{M}'$. Отже, $\mathcal{M}'$ є власною нільпотентною піднапівгрупою в $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем e, яка містить напівгрупу $\mathcal{M}$, що суперечить максимальності $\mathcal{M}$.

Доведемо насамкінець, що $\varphi(\mathcal{M}) = \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x$. Розглянемо напівгрупу

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'' = \big\{& a \in \mathrm{PAut}\, T \mid a|_{\mathrm{dom}(e)} = e,\\ & \forall x \in \mathrm{dom}(e)\ \exists\, b \in \mathcal{M} : a|_{T_x} = b|_{T_x} \big\}.\end{aligned}$$

Очевидно, що $\varphi(\mathcal{M}'') = \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x$. З визначення $\mathcal{M}''$ випливає, що для кожного $a \in \mathcal{M}''$ $a^k = e$, тобто $\mathcal{M}''$ є власною нільпотентною піднапівгрупою з нулем e, а також, що $\mathcal{M}'' \supset \mathcal{M}$. В силу максимальності $\mathcal{M}$ матимемо $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Таким чином, $\mathcal{M} \cong \prod_{x \in \mathrm{dom}(e)} M_x$. □

Твердження 1. *Нехай* P *— інверсна напівгрупа. Кількість елементів максимальної нільпотентної піднапівгрупи* $P \wr_p \mathcal{IS}_n$ *дорівнює*

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, |P|^{n-k} = |P|^n\, B_n\left(\frac{1}{|P|}\right),$$

де $B_n(x)$ *— це* n*-й многочлен Белла.*

Доведення. За теоремою 2 максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $P \wr_p \mathcal{IS}_n$ має вигляд $P \wr_p S$, де S — максимальна нільпотентна піднапівгрупа $\mathcal{IS}_n$. Кількість елементів дефекту k в $\mathcal{IS}_n$ дорівнює $S(n,k)$, числу Стірлінга другого роду (див. [1, Наслідок 3]).

Кількість пар вигляду (f, a) для фіксованого елементу a дефекту k дорівнює кількості відображень з $\mathrm{dom}(a)$ в P, їх буде $|P|^{n-k}$. Сумуючи по всіх k, одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,|P|^{n-k} = $$
$$= |P|^n \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,|P|^{-k} = |P|^n\, B_n\left(\frac{1}{|P|}\right).$$

$\square$

Позначимо через $F^k(x) = \underbrace{F(F\ldots(F(x}_{k}))\ldots)$.

Наслідок 2. *Потужність максимальної нільпотентної піднапівгрупи* $\wr_p^k \mathcal{IS}_n$ *дорівнює*

$$\left|\wr_p^{k-1} \mathcal{IS}_n\right|^n B_n\left(\frac{1}{\left|\wr_p^{k-1}\mathcal{IS}_n\right|}\right).$$

Доведення. В [2] показано, що $|\wr_p^k \mathcal{IS}_n| = F^k(1)$, де $F(x) = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}^2 i! x^i$. Враховуючи це та твердження 1, отримуємо твердження. $\square$

Твердження 2. *Нехай T — k-рівневе n-регулярне кореневе дерево. Кількість власних максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи* $\mathrm{PAut}\, T$ *з нулем* $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$ *дорівнює*

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(e)} (k_x)!,$$

де k_x — кількість вершин першого рівня дерева T_x.

Позначимо $l(x)$ — рівень дерева T, якому належить вершина x, а $h(x) = k - l(x) + 1$. Потужність кожної максимальної власної піднапівгрупи дорівнює

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(e)} \left|\wr_p^{h(x)} \mathcal{IS}_n\right|^{k_x} B_{k_x}\left(\frac{1}{\left|\wr_p^{h(x)}\mathcal{IS}_n\right|}\right)$$

Доведення. З теореми 3 випливає, що кількість максимальних власних нільпотентних піднапівгруп визначається різними максимальними піднапівгрупами M_x напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T_x$, $x \in \mathrm{dom}(e)$. Нехай k_x — кількість вершин першого рівня дерева T_x, тоді $\mathrm{PAut}\, T_x \cong P \wr_p \mathcal{IS}_{k_x}$, де P — інверсна напівгрупа. За теоремою 2 максимальна власна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T_x$ має вигляд $P \wr_p S_x$, де S_x — максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{IS}_{k_x}$, тому кількість максимальних нільпотентних піднапівгруп M_x збігається з кількістю максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи $\mathcal{IS}_{k_x}$, яка дорівнює $k_x!$ (див. [1, Наслідок 4]).

Оскільки кореневі дерева T_x не перетинаються, то піднапівгрупи M_x обираються незалежно, тому шукана кількість власних максимальних нільпотентних піднапівгруп напівгрупи $\mathrm{PAut}\, T$ з нулем $e \in E(\mathrm{PAut}\, T)$ дорівнює

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(e)} (k_x)!,$$

де k_x — кількість вершин першого рівня дерева T_x.

Друга частина твердження випливає з теореми 3 та наслідку 2.

$\square$

Список використаних джерел

1. *Ganyushkin O.* Combinatorics of Nilpotents in Symmetric Inverse Semigroups / Ganyushkin O., Mazorchuk V. // Annals of Combinatorics – 2006 – Vol. 8 – Issue 2 – P. 161–175.

2. *Kochubinska Ye.* Combinatorics of partial wreath power of inverese symmetric semigroup $\mathcal{IS}_d$/Kochubinska Ye.//Algebra and Discrete Mathematics – 2007 – No. 1 – P. 49–61.

3. *Meldrum J.D.P.* Wreath products of groups and semigroups / Meldrum J.D.P. Harlow, Essex: Longman Group Ltd., 1995 – xii+324 p. – (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 74.)

Надійшла до редколегії 20.12.2012