УДК 539.3

Галазюк В. А.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Кіт Г. С.[2], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України

Температурне поле у просторі за теплового потоку у круглому отворі теплонепроникного екрану

Розв'язана стаціонарна задача теплопровідності про потік тепла крізь круглий отвір у теплонепроникному екрані за неперервного розподілу радіальної складової вектора теплового потоку на краю отвору.

Ключові слова: стаціонарна теплопровідність, тепловий потік, інтегральні рівняння першого роду.

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3 б

V. A. Halazyuk[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
H. S. Kit[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU

Temperature field in a space by heat flow in a circular aperture of heat-proof screen

Stationary problem of heat conduction of heat flow through circular aperture in a heat-proof screen by continuous distribution of radial vector component of heat flow on the aperture border is solved.

Key Words: stationary heat conduction, heat flow, integral equation of the first kind.

[1] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universitetska str., 1
[2] Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 79060, Lviv, Naukova str., 3 б

У праці [1] побудований фундаментальний розв'язок рівняння стаціонарної теплопровідності з плоскою пеленою теплових диполів і показано, що тоді температурне поле і складова вектора теплового потоку у площині розміщення диполів мають стрибок при переході цієї площини по нормалі. Тому за означенням [2] ця площина є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля нульового порядку – внутрішнім тепловим вихором (internal thermal vortex).

Нижче ця модель застосована до визначення температурного поля у просторі за теплового потоку в круглому отворі теплонепроникного екрану. Така задача теплопровідності має повну аналогію із задачею гідромеханіки про течію ідеальної нестисливої рідини через круглий отвір в нерухомому екрані, де роль температури відіграє потенціал швидкостей.

1. Простір віднесемо до циліндричної системи координат $R\alpha, \beta, R\gamma$, де R – радіус отвору, і будемо вважати, що у площині $\gamma = 0$ розподілені теплові диполі за законом

$$D(\alpha, p) = 2T_0 \int_0^\infty \eta H(\eta, p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta \qquad (1)$$

з твірною функцією $H(\eta, p)$, яка залежить від параметра $p > 0$. Тоді осесиметричне температурне поле $T(\alpha, \gamma)$ у просторі визначається рівнянням стаціонарної теплопровідності з пеленою теплових диполів

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T = T_0 \delta'(\gamma) \int_0^\infty \eta H(\eta, p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta$$

і є таким:

$$T(\alpha, \gamma) = T_0 \operatorname{sign}\gamma \int_0^\infty \eta H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta. \qquad (2)$$

Якщо ввести безрозмірний вектор теплового потоку $\vec{q}^* = R\vec{q}/(\lambda T_0)$, то його компоненти у напрямку осей α і γ

$$q_\alpha^*(\alpha,\gamma) = \operatorname{sign}\gamma \int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta \qquad (3)$$

забезпечують виконання рівняння балансу теплового потоку $\operatorname{div}\vec{q}^* = 0$ і створюють зосереджену у площині $\gamma = 0$ теплову вихорову пелену, оскільки

$$\left(\operatorname{rot}\vec{q}^{\,*}\right)_\beta = \partial_\alpha q_\gamma^* - \partial_\gamma q_\alpha^* =$$

$$= 2\delta(\gamma)\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_1(\eta\alpha)\, d\eta$$

завжди не рівний нулеві. Отже, за існування у площині $\gamma = 0$ вихорової складової вектора теплового потоку $\vec{q}^{\,*}$ закон теплопровідності Фур'є $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ не має місця, тому що його нормальна складова $q_\gamma{}^*(\alpha,\gamma)$ (3) ним не визначається.

2. Якщо у площині $\gamma = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$ існує теплонепроникний екран, то слід знайти розподіл теплових диполів (1), які забезпечують в крузі $0 \le \alpha \le 1$ довільний тепловий потік $q_\gamma{}^*(\alpha, \pm 0)$, а зовні цієї області $q_\gamma{}^*(\alpha, \pm 0) = 0$. Тобто маємо такі крайові умови:

$$q_\gamma{}^*(\alpha, \pm 0) = (1-\alpha^2)^p f(\alpha^2)\,,\ 0 \le \alpha \le 1\,,$$

$$q_\gamma{}^*(\alpha, \pm 0) = 0\,,\ 1 \le \alpha < \infty\,, \qquad (4)$$

причому при $p > 0$ умови (4) є узгодженими на краю отвору $\alpha = 1$.

Оскільки розподіл диполів (1) визначається твірною функцією $H(\eta, p)$, то відповідно до подання (3) і крайових умов (4) одержимо для її визначення інтегральні рівняння

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta =$$

$$= (1-\alpha^2)^p f(\alpha^2), \quad 0 \le \alpha \le 1\,, \qquad (5)$$

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta = 0, \quad 1 \le \alpha < \infty\,. \qquad (6)$$

Твірну функцію $H(\eta,p)$ подамо узагальненим рядом Неймана [3]

$$\eta^2 H(\eta,p) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n+p+1}(\eta)}{\eta^p} \qquad (7)$$

і підставимо його в інтегральні рівняння (5) і (6) та обчислимо розривні інтеграли Вебера – Шафгейтліна [4]. В результаті переконаємось, що за вибору твірної функції $H(\eta,p)$ у вигляді ряду (7) інтегральне рівняння (6) виконується за довільних коефіцієнтів a_n, а рівняння (5) набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1) F(n+1, -n-p; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n+p+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1)(1-\alpha^2)^p F(-n, n+p+1; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n+p+1)} =$$

$$= (1-\alpha^2)^p f(\alpha^2), \quad 0 \le \alpha \le 1\,,$$

звідки знайдемо, що

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1) F(-n, n+p+1; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n+p+1)} = f(\alpha^2)\,,$$

$$0 \le \alpha \le 1\,, \quad (8)$$

де $\Gamma(x)$ – гама-функція, а гіпергеометрична функція

$$F(-n, n+p+1; 1; \alpha^2) = (n+1)^{-1} P_n^{(1,-p)}(1-2\alpha^2)$$

є поліномами Якобі [4], які утворюють повну і ортогональну систему функцій на проміжку $[0,1]$. Тому коефіцієнти ряду (8) знаходимо за формулою ортогональності.

За відомими коефіцієнтами a_n, твірною функцією $H(\eta,p)$ (7) і поданням (1) знаходимо розподіл диполів $D(\alpha,p)$, які забезпечують виконання крайових умов (4). Отже, маємо розривний інтеграл Вебера – Шафгейтліна

$$D(\alpha,p) = 2T_0 \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty J_0(\eta\alpha) J_{2n+p+1}(\eta) \eta^{-p-1} d\eta\,,$$

а тому в області $0 \le \alpha \le 1$

$$D(\alpha,p) = 2T_0 \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+0{,}5)}{2^{p+1}\Gamma(n+p+1{,}5)} \times$$

$$\times F(n+0{,}5, -n-p-0{,}5; 1; \alpha^2)\,, \quad (9)$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$D(\alpha,p) = 2T_0 \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+0{,}5)}{2^{p+1}\Gamma(2n+p+2)} \times$$

$$\times \frac{F(n+0{,}5, n+0{,}5; 2n+p+2; \alpha^{-2})}{\Gamma(-n+0{,}5)\alpha^{2n+2}}\,. \quad (10)$$

Зазначимо, що згідно з поданнями (1) і (2) існує зв'язок між стрибком температури у площині $\gamma = 0$ і розподілом у цій площині диполів:

$$D(\alpha,p) = 2|T(\alpha, \pm 0)|\,. \qquad (11)$$

Отже, за фізично обґрунтованого неперервного розподілу стрибка температури у площині $\gamma = 0$ диполі відповідно до рівності (11) завжди існують.

Знайдемо тепер розподіл радіальної складової теплового потоку $q_\alpha^*(\alpha, \pm 0)$ у площині $\gamma = 0$. За першим поданням (3) одержимо, що

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty J_1(\eta\alpha) J_{2n+p+1}(\eta) \eta^{-p} d\eta\,,$$

звідки маємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1{,}5)\alpha}{2^p\Gamma(n+p+0{,}5)} \times$$

$$\times F(n+1{,}5, -n-p+0{,}5; 2; \alpha^2), \quad (12)$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1{,}5)}{2^p\Gamma(2n+p+2)} \times$$

$$\times\frac{F(n+1{,}5, n+0{,}5; 2n+p+2; \alpha^{-2})}{\Gamma(-n+0{,}5)\alpha^{2n+2}}. \quad (13)$$

Оскільки теплові потоки на краю отвору $\alpha = 1$ повинні виконувати фізично обґрунтовану граничну рівність

$$\lim_{\alpha\to 1-0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0), \quad (14)$$

то вона буде мати місце тільки за умови $p > 0$ тому, що гіпергеометрична функція Гаусса $F(a, b; c; x^2)$ визначена в точці $x = 1$ за умови $c - a - b > 0$.

Таким чином, за виконання нерівності (14) стрибок теплового потоку $q_\alpha(\alpha, \pm 0)$ існує в області отвору $0 \le \alpha \le 1$ і створює там теплову вихорову пелену, а разом з тим і стрибок температури.

3. Якщо припустити, що теплова вихорова пелена в отворі відсутня, то у поданні (12) слід покласти $p = -0{,}5$. Тоді за поданням (13) в області $1 \le \alpha < \infty$ одержимо, що

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \pm\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1{,}5)}{\Gamma(2n+1{,}5)} \times$$

$$\times\frac{F(n+1{,}5, n+0{,}5; 2n+1{,}5; \alpha^{-2})}{\Gamma(-n+0{,}5)\alpha^{2n+2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2-1}} \times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1{,}5)F(n, n+1; 2n+1{,}5; \alpha^{-2})}{\Gamma(2n+1{,}5)\Gamma(-n+0{,}5)\alpha^{2n+1}}. \quad (15)$$

Розподіл (15) теплового потоку $q_\alpha^*(\alpha, \pm 0)$ в області $1 < \alpha < \infty$ є сингулярним з кореневою особливістю при $\alpha \to 1+0$, що суперечить фізиці явища та умові (14). Разом з тим відповідно до подання (9) в отворі $0 \le \alpha \le 1$ існують диполі, які розподілені за законом

$$D(\alpha; -0{,}5) =$$

$$= 2T_0\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+0{,}5)F(n+0{,}5, -n; 1; \alpha^2)}{\sqrt{2}\,\Gamma(n+1)}$$

і за формулою (11) створюють там стрибок температури $T(\alpha, \pm 0)$. Тому за означенням [2] в отворі існує матеріальна поверхня розриву параметрів поля нульового порядку – внутрішній тепловий шар.

Список використаних джерел

1. *Halazyuk V., Kit H.* The axisymmetric stress-strain state of a body with a plane sheet of thermal sources or dipoles // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2011. – N 10. – P. 54-60. (in Ukrainian).
2. *Truesdell C.* A. First Course in Rational Continuum Mechanics. – Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1972.
3. *Halazyuk V.* Bounded solution of boundary problem of stress-strain state of an elastic body with absolutely rigid discoidal inclusion with zero thickness // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 1987. – N 12. – P. 23-27. (in Ukrainian).
4. *Abramowits M. and Stegun I.* (editors). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / National Bureau of Standards. Appl. Math. – Ser. 55. – 1964.

Надійшла до редколегії 25.03.13