УДК 539.3

Гудрамович В. С.[1], член-корр. НАН Украины, д. т. н., проф.,
Гарт Э. Л.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Рябоконь С. А.[1], к. т. н.

Применение проекционно-итерационных схем МКЭ к решению задач упругопластического деформирования оболочек с отверстиями

Разработаны проекционно-итерационные схемы вариационно-сеточного метода конечных элементов для численного анализа упругопластического деформирования цилиндрических оболочек с отверстиями. Созданы методики и алгоритмы решения соответствующих задач. Исследовано взаимовлияние отверстий при построении зон пластических деформаций.

Ключевые слова: упругопластические оболочки, отверстия, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

[1] Институт технической механики НАН Украины и Государственного космического агентства, 49005, г. Днепропетровск, ул. Лешко-Попеля, 15
e-mail: hudramovich@i.ua
[2] Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, 49010, г. Днепропетровск, просп. Гагарина, 72, e-mail: hart@ua.fm

V. S. Hudramovich[1], Corresponding Member of NAS Ukraine, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
E. L. Hart[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
S. A. Rjabokon'[1], PhD (Tech.)

Application of projective-iterative schemes of FEM to the solution of elastoplastic deformation problems for shells with openings

The projective-iterative schemes of finite element method for numerical analysis of elastoplastic deformation of cylindrical shells with openings are developed. The methods and algorithms for solution of corresponding problems are given. The mutual influence of openings with construction of plastic deformations zones is investigated.

Key Words: elastoplastic shells, openings, finite element method, projective-iterative schemes.

[1] Institute of technical mechanic of Nat. Acad. Sci. Ukraine and State Space Agency Ukraine, 49005, Dnepropetrovsk, Leshko-Popel St., 15
e-mail: hudramovich@i.ua
[2] Oles' Honchar National University of Dnepropetrovsk, 49010, Dnepropetrovsk, Gagarin avenue, 72
e-mail: hart@ua.fm

Постановка задач. Методы решения

Задачи деформирования элементов оболочечных конструкций с отверстиями различной формы имеют большое практическое значение [1, 2]. Оболочки оптимально сочетают вес и необходимую прочность, отверстия-люки являются основным проявлением неоднородности конструкций в различных отраслях техники.

Сложность применения аналитических методов расчёта делает целесообразным использование численных методов, в частности, одного из самых распространенных – вариационно-сеточного метода конечных элементов (МКЭ).

Проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ приводят к значительной экономии компьютерного времени расчёта. Это обуславливает актуальность разработки вычислительных алгоритмов на их основе. Основные положения таких схем базируются на известных теоретических разработках в области математики [3-5].

Высокие уровни действующих нагрузок приводят к появлению пластических деформаций. При их учёте используются методы упругих решений. Они основаны на построении процессов последовательных приближений, в каждом из которых решается задача теории упругости с некоторыми дополнительными факторами, учитывающими особенности пластического деформирования: дополнительные нагрузки или деформации, переменные параметры упругости (ППУ) [6-8]. Используем метод ППУ [7, 8]. В соответствии с ним уравнения, связывающие деформации и напряжения, аналогичны уравнениям теории упругости, однако в них модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν переменны и зависят от уровня накопленных пластических деформаций. Схема метода ППУ показана на рис. 1 (в каждом приближении решается задача теории упругости с новыми E и ν, определяемыми по известным формулам).

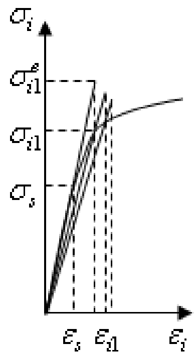


Рис. 1. Схема метода переменных параметров упругости

При использовании метода ППУ на каждом этапе последовательных приближений решается задача теории упругости с помощью проекционно-итерационных схем МКЭ. Напомним основную идею таких схем [3, 9-11]. Исходная задача минимизации функционала аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью дискретных экстремальных задач для функций многих переменных. Каждая из них с помощью итерационного метода последовательной верхней релаксации [4] решается следующим образом. Для функции многих переменных, соответствующей некоторому грубому разбиению области на конечные элементы, строится только несколько приближений, последнее интерполируется на более мелкую конечноэлементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума функции многих переменных. Такой процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Проекционно-итерационные схемы МКЭ использованы при численном анализе деформирования упругих и упругопластических пластин [10], упругих [12] и упругопластических [13] оболочек, пластического деформирования упругопластических структурированных сред (с порами и включениями разной формы) [14]. Они дают значительную (в десятки раз) экономию компьютерного времени расчёта по сравнению с соответствующем временем для традиционного МКЭ (на одной сетке).

Рассмотрим упругопластическое деформирование оболочки с отверстиями. Для определенности возьмём цилиндрическую оболочку с прямоугольными или круговыми отверстиями при осевом сжатии. Расчётные нагрузки меньше критических, определённых при пластических деформациях [8].

Результаты численного анализа

Следуя МКЭ, оболочку разбиваем на конечные элементы (прямоугольные (ПЭ) или треугольные (ТЭ)) [15]. Для прямоугольных отверстий целесообразно использование ПЭ, для круглых – ТЭ. Проведённый в [16] для плоских задач теории упругости анализ показал, что ТЭ дают более точные результаты, однако время расчёта – больше, чем для ПЭ. Используются методики, при которых не требуется хранения матрицы жёсткости системы в явном виде, а значения перемещений оболочки в текущем узле выражаются через их узловые значения в прилегающих к данному узлу конечных элементах [16, 17].

Для определённости рассмотрим оболочку с тремя прямоугольными отверстиями (развёртка оболочки показана на рис. 2). Длина, радиус и толщина оболочки: $L = 1{,}6$ м, $R = 1$ м, $h = 0{,}004$ м, материал – алюминиевый сплав Д16Т (такие параметры и материал соответствуют, в частности, конструкциям ракетно-космической техники [2]). Размер большего отверстия $0{,}4 \times 0{,}4$ м, меньших $-\ 0{,}2 \times 0{,}2$ м.

При разработке методики взяты эрмитовы ПЭ. Проекционно-итерационная схема МКЭ реалиизована на шести вложенных вдвое конечноэлементных сетках. Количество k_n строящихся приближений на n-ом шаге ($n = 1\ldots6$) выбиралось как наименьшее целое k, удовлетворяющее условию

$$\left\| z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)} \right\| \le \varepsilon_n, \quad k = 0, \ldots, k_n$$

($z_h^{(k_n)}$ – приближённое решение конечномерной задачи; ε_n – заданная точность вычислений на n-ой сетке).

При решении вариационных задач теории оболочек используются известные функционалы энергии [18]. Численный анализ показывает, что для рассмотренных размеров оболочек и отверстий вполне допустимо использование функционала для пологих оболочек.

Такой функционал имеет вид [19]

$$U = h\int_{\Omega}\left\{\frac{\tilde{G}}{1-\tilde{\nu}}\left[u_{,\alpha}^2 + 2\tilde{\nu}u_{,\alpha}\left(v_{,\beta} + w/R\right) + \left(v_{,\beta} + w/R\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \tilde{G}\left(u_{,\beta} + v_{,\alpha}\right)^2 \big/ 2\right\} d\alpha d\beta + \frac{h^3}{12}\int_{\Omega}\left[\frac{\tilde{G}}{1-\tilde{\nu}}\left(w_{,\alpha\alpha}^2 + \right.\right.$$

$$+2\tilde{\nu}w_{,\alpha\alpha}w_{,\beta\beta}+w_{,\beta\beta}^{2}\big)+2\tilde{G}w_{,\alpha\beta}^{2}\Big]d\alpha d\beta-$$

$$-\int_{\Gamma}\left(T_1u+S_1v+Q_1w+M_1\varphi_1\right)d\beta\,, \qquad (1)$$

где модуль сдвига $\tilde{G}$ и коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}$ разные для каждого шага последовательных приближений метода ППУ; T_1, S_1, Q_1, M_1 – соответственно продольные, касательные, поперечные усилия и изгибающий момент, приложенные на краях оболочки Γ.

Деформации и напряжения для каждого из приближений определяются соотношениями:

$$\varepsilon_\alpha=u_{,\alpha};\quad \varepsilon_\beta=v_{,\beta}+w/R;\quad \omega=u_{,\beta}+v_{,\alpha};$$
$$\chi_\alpha=-w_{,\alpha\alpha};\quad \chi_\beta=-w_{,\beta\beta};\quad \chi_{\alpha\beta}=-w_{,\alpha\beta}; \qquad (2)$$
$$\sigma_\alpha=2\tilde{G}\left(\varepsilon_\alpha+\tilde{\nu}\varepsilon_\beta\right)/(1-\tilde{\nu});$$
$$\sigma_\beta=2\tilde{G}\left(\varepsilon_\beta+\tilde{\nu}\varepsilon_\alpha\right)/(1-\tilde{\nu});\quad \tau=\tilde{G}\omega.$$

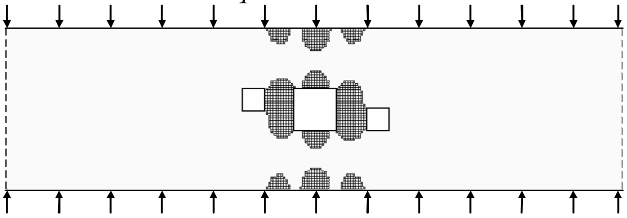
В (1), (2) запятая означает дифференцирование по координате, величины $\tilde{G}$ и $\tilde{E}$ связаны зависимостью $\tilde{E}=2(1+\tilde{\nu})\tilde{G}$.

Варьирование расстояния между отверстиями и их размеров приводит к разным ситуациям трансформации зон пластических деформаций (в дальнейшем – просто зон), которые вначале возникают возле краёв отверстий и увеличиваясь сливаются. Слияние зон приводит к значительному снижению жёсткости оболочки и уменьшению её несущей способности.

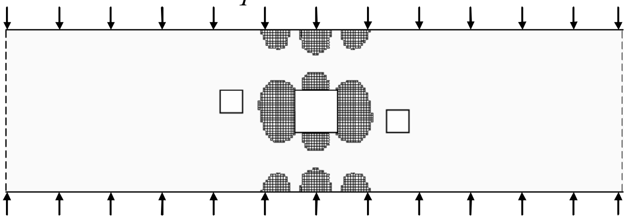
Возможны различные другие сценарии образования, трансформации и слияния зон для разных оболочек и отверстий.

При расчётах использована деформационная теория пластичности в сочетании с проекционно-итерационными схемами МКЭ. Вблизи углов отверстий, там, где происходит сложное нагружение, её применимость должна быть исследована [6]. Возможно использование теории пластического течения [7, 8].

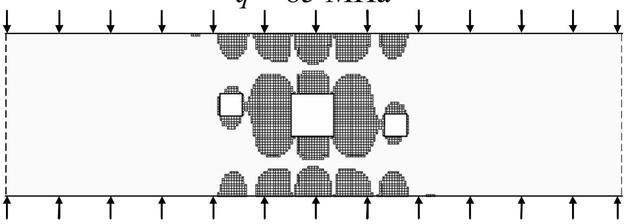
На рис. 2 показано распределение зон в цилиндрической оболочке при разных значениях сжимающей нагрузки q. Рис. 2, *а* даёт распределение зон для относительного расстояния между отверстиями $l/R=0{,}6$. Рис. 2, *б*, *в* – для $l/R=0{,}8$. Зоны образуются вначале у краёв вырезов, при повышении нагрузки они трансформируются и сливаются, становятся общими для отверстий. Это приводит к падению жёсткости оболочек (для упругих оболочек она определяется через E, для упругопластических через касательный и секущий модули, которые меньше E) и может использоваться при прогнозе несущей способности оболочек.



а



б



в

Рис. 2. Распределение зон пластических деформаций для оболочки

В результате расчётов зафиксированы те уровни нагрузок, при которых зоны пластических деформаций сливаются.

Разработанные методики и программа на языке С++ позволяют рассмотреть различные другие варианты конструктивного оформления упругопластических оболочек с отверстиями прямоугольной, круговой и эллиптической формы.

Заключение

Разработаны проекционно-итерационные схемы вариационно-сеточного МКЭ для исследования упругопластического деформирования оболочек с вырезами различной формы. Такие схемы дают существенный выигрыш компьютерного времени расчёта по сравнению с основанным на традиционном МКЭ. Разработанные методики и вычислительные алгоритмы дают возможность изучить процесс образования зон пластических деформаций и прогнозировать несущую способность неоднородных оболочечных конструкций.

Список использованных источников

1. *Guz' A. N., Chernyshenko I. S., Chekhov V. N., et al.* Shell design methods, in 5 volumes. Vol. 1. Theory of shell weakened by openings. – Kiev: Naukova Dumka. – 1980. – 636 p. (in Russian).
2. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 45. – N 12. – P. 1323-1355.
3. *Krasnosel'sky M.A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., et al.* Approximate solution of operator equations. – Moscow: Nauka, 1969. – 455 p. (in Russian).
4. *Samarsky A. A. and Nikolaev E. S.* Methods for solving finite-difference equations. – Moscow: Nauka, 1978. – 592 p. (in Russian).
5. *Vasil'ev F. P.* Optimization method, in 2 books. – Moscow: MTs NMO, 2011. – B. 1. – 620 p.; b. 2. – 433 p. (in Russian).
6. *Il'yushin A. A.* Collected works, in 4 volumes. Vol. 2. Plasticity: 1946 – 1966. – Moscow: Fizmatlit, 2004. – 480 p. (in Russian).
7. *Birger I. A.* General algorithms for solving elastic, plastic and creep problems / Advances in Solids Mechanics. – Moscow: Nauka, 1975. – P. 51-73 (in Russian).
8. *Hudramovich V. S.* Stability of elastoplastic shells. – Kiev: Naukova Dumka. – 1987. – 216 p. (in Russian).
9. *Hart E. L.* Projective-iterative modifications of FEM in boundary problems of elasticity theory // Dop. Nat. Acad. Nauk Ukrainy. – 2008. – N 6. – P. 56-61. (in Russian).
10. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Rjabokon' S. A.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – Vol. 78. – Issue 1. – P. 181-197.
11. *Hart E. L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 167, No 1. – P. 76-88.
12. *Hart E. L., Klimenko D. V., Rjabokon' S. A.* Investigation of stress-and-strained state of cylindrical shells with rectangular opening on base of projective-iterative schemes of FEM // Methods of solving applied problems in solid mechanics. – 2011. – Issue 12. – P. 47-54. (in Rusian).
13. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Rjabokon' S. A.* Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Problemy prochnosti. – 2013. – N 1. – P. 5-16. (in Rusian).
14. *Hart E. L. and Hudramovich V. S.* Computing analysis of elastoplastic deformation structural media // Dop. Nat. Akad. Nauk Ukrainy. – 2012. – N 5. – P. 49-56. (in Russian).
15. *Zienkiewicz O. C. and Morgan K.* Finite elements and approximation. – NY, …, Toronto: A Willey-Interscience Publ., 1983. / Translated into Russian. – Moscow: Mir, 1986. – 318 p.
16. *Hart E. L. and Hudramovich V. S.* Influence of finite-elements form on computational efficiency of projective-iterative methods for solution of the plane problem in elasticity theory // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2008. – N 4. – P. 53-58. (in Ukrainian).
17. *Kuzmenko V. I.* Three-dimensional contact problems for multilayer elastoplastic packet // Izv. AN USSR. Mechanics of solid. – 1984. – N 4. – P. 105-112. (in Russian).
18. *Novozhilov V. V., Chernych K. F., Michailovsky E. I.* Linear theory of thin shells. – Leningrad: Politechnika, 1991. – 656 p. (in Russian).
19. *Golovanov A. I. and Kornishin M. S.* Introduction to finite element method for statics of thin shells. – Kazan': Fiziko-tech. Institute of Kazan' filial agency AN USSR, 1989. – 270 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13