

УДК 539.3

Острик В. І.<sup>1</sup>, д. ф.-м. н., доц.,  
Улітко А. Ф.<sup>1</sup>, д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН  
України,  
Щокотова О. М.<sup>2</sup>, к. ф.-м. н.

### Контакт з відривом штампа і пружного клина

*Розглянуто плоску задачу теорії пружності про гладкий контакт пружного клина та жорсткого штампа з прямолінійною основою. Одну з граней клина жорстко закріплено, а на частині іншої грані, прилеглої до вершини клина, вдавлюється штамп. З'ясовано, що при перевищенні куту розхилу клина певного критичного значення поблизу вершини клина відбувається відрив межі клина від основи штампа. Контактну задачу з відривом із застосуванням методу Вінера – Гопфа зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Визначено контактні напруження та відносний розмір зони відриву для різних кутів розхилу клина.*

*Ключові слова:* пружний клин, штамп, контакт з відривом, метод Вінера – Гопфа, контактні напруження.

<sup>1</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е  
e-mail: ostrik\_v@rambler.ru

<sup>2</sup> Інститут прикладної фізики НАН України,  
40000, м. Суми, вул. Петропавлівська, 58  
e-mail: olgaschokotova@gmail.com

### Вступ

Розв'язок задачі про гладкий контакт штампа з прямолінійною основою та пружного клина з однією закріпленою гранню у випадку, коли штамп дотикається вершини клина, знайдено методом ортогональних многочленів у роботі [1] та методом Вінера – Гопфа в роботі [2]. У [2] виявлено існування критичного значення кута розхилу клина  $\alpha_* = \arccos(1/\sqrt{m})$  ( $m$  – число Пуассона; якщо  $m = 10/3$ , то  $\alpha_* = 56,8^\circ$ ), при перевищенні якого контактні напруження стають додатними у малому околі вершини клина. Побудований в [1, 2] розв'язок задачі у такому випадку втрачає фізичний зміст та вказує на порушення контакту на краї штампа, прилеглому до вершини клина.

© В. І. Острик, А. Ф. Улітко,  
О. М. Щокотова, 2013

V. I. Ostryk<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof.,  
A. F. Ulitko<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor.  
Memb. of NASU,  
O. M. Shchokotova<sup>2</sup>, PhD (Phys.-Math.)

### The tearing off contact of a punch and an elastic wedge

*The plane problem of elasticity theory for smooth contact of an elastic wedge and a hard punch with rectilinear base was considered. One of the wedge faces is fixed, and at the part of the other face adjacent to the wedge vertex punch is pressed. It was found that when the wedge angle exceeds a critical value near the wedge vertex occurs tearing off the wedge face from the punch base. Using the Wiener – Hopf method, contact problem with tearing off was reduced to an infinite system of algebraic equations. The contact stresses and the relative size of the zone of tearing off for different wedge angles were determined.*

*Key Words:* elastic wedge, punch, tearing off contact, Wiener – Hopf method, contact stresses.

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv,  
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e  
e-mail: ostrik\_v@rambler.ru

<sup>2</sup> Institute of Applied Physics, NAS of Ukraine,  
40000, Sumy, Petropavlivska str., 58  
e-mail: olgaschokotova@gmail.com

Нижче для кутів розхилу клина  $\alpha$  більших за критичний ( $\alpha_* < \alpha < \pi/2$ ) задача формулюється в уточненій постановці з урахуванням часткового відриву поверхні клина від основи штампа. Розв'язок задачі отримано узагальненим методом Вінера – Гопфа із застосуванням підходу, розвинутому в роботах [3-5].

У випадку закритичних кутів розхилу клина побудований у [2] за умови безвідривного контакту розв'язок дозволяє наближено оцінити розмір зони відриву. Так для клина з кутом  $\alpha = 5\pi/12$  та числом Пуассона  $m = 10/3$  довжина зони додатних контактних напружень складає 0,018 розміру області контакту. Отже, у розглядуваній задачі слід очікувати, що розмір зони відриву є малою величиною, порядку 0,01.

### Постановка задачі

В умовах плоскої деформації розглянемо пружний клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$  ( $\alpha_* < \alpha < \pi/2$ ), грань  $\vartheta = 0$  якого жорстко закріплена, а у грань  $\vartheta = \alpha$  на відрізку  $0 \leq r \leq l$  вдавлюється штамп з прямолінійною основою (рис. 1). До правого краю штампа ( $r = l$ ) прикладено нормальну силу  $P$ , а лівий його край ( $r = 0$ ) закріплений у вершині клина. В результаті деформації пружного клина основа штампа повертається на деякий кут  $\varepsilon$ . Величина моменту  $M$ , прикладеного при цьому до штампа, невідома і залежить від розподілу контактних напружень. Припускаємо, що на інтервалі  $0 < r < l_1$  ( $\vartheta = \alpha$ ) відбувається відрив межі клина від основи штампа. Розмір  $l_1$  заздалегідь невідомий і потребує визначення. Сили тертя в області контакту  $l_1 \leq r \leq l$  не враховуються.

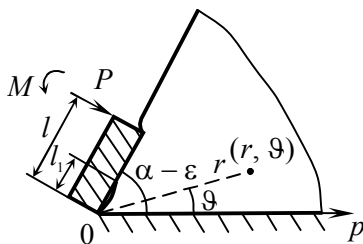


Рис. 1. Взаємодія штампа з пружним клином

Змішані крайові умови на гранях клина мають вигляд

$$\begin{aligned} u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= -\varepsilon r \quad (l_1 \leq r \leq l), \\ \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= 0 \quad (0 \leq r < l_1, l < r < \infty), \\ \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= 0, \quad u_r|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Крім того, потрібно виконати умови рівноваги штампа

$$\int_{l_1}^l \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = -P, \quad \int_{l_1}^l r \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = M - Pl. \quad (2)$$

### Інтегральне рівняння задачі та його розв'язання

Введемо невідому функцію контактних напружень

$$g(r) = \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} \quad (l_1 < r < l), \quad (3)$$

де  $G$  – модуль зсуву. Вважаємо, що згідно з другою умовою (1)  $g(r) = 0$ , якщо  $0 \leq r < l_1$  і  $r > l$ .

Розв'язок основної змішаної задачі для клина, коли на грані  $\vartheta = \alpha$  задані нормальні напруження і відсутні дотичні напруження, а на грані  $\vartheta = 0$  – нульові переміщення, отримуємо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. На грані  $\vartheta = \alpha$  клина маємо:

$$\begin{aligned} u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= \frac{m-1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{s\Delta(s)} a(s) r^{-s} ds, \quad a(s) = \int_{l_1}^l g(y) y^s dy, \\ \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds \quad (-1 < c < 0), \\ \lambda(s) &= (3m-4) \sin 2\alpha s - ms \sin 2\alpha, \\ \Delta(s) &= (3m-4)m(\cos 2\alpha s - 1) - \\ &\quad - 2m^2 s^2 \sin^2 \alpha + 8(m-1)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок (4) задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставимо в цю умову вираз для колових переміщень із (4). Після заміни змінних

$$r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta} \quad (5)$$

та введення нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = g(le^{-\eta}) e^{-\eta} \quad (6)$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq a), \quad (7)$$

$$a = \ln \frac{l}{l_1}, \quad k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$K(\tau) = \frac{\lambda(-i\tau)}{-i\tau\Delta(-i\tau)}, \quad f(\xi) = -\frac{\varepsilon}{2(m-1)} e^{-\xi}.$$

На відміну від класичного інтегрального рівняння Вінера – Гопфа з різницевим ядром  $k(\xi - \eta)$  на півнескінченному проміжку [6], рівняння (7) задано на скінченному проміжку  $0 \leq \xi \leq a$ . Для його розв'язання застосуємо узагальнений метод Вінера – Гопфа [3-5].

Поклавши  $\varphi(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$  і  $\eta > a$ , розповсюдимо інтегральне рівняння (7) на всю числову вісь і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Увівши невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi^+(z) = -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta,$$

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta, \quad (8)$$

аналітичні відповідно у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$  і  $\text{Im } z < c^-$  ( $c^+ < 0$ ,  $c^- > 0$ ), приходимо до системи функціональних рівнянь

$$K(z)\Phi^+(z) + e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi^-(z) = F^+(z),$$

$$\Phi^+(z) = e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-) \quad (9)$$

з правою частиною

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(\xi)e^{iz\xi} d\xi = A\varepsilon \frac{e^{a(iz-1)} - 1}{1-iz},$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(m-1)}. \quad (10)$$

Факторизуємо коефіцієнт  $K(z)$  системи рівнянь (9) у нескінченних добутках

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad (11)$$

$$K^+(z) \equiv K(0)K^-(-z) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{is_n}\right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n}\right)^{-1},$$

де  $s_n$  і  $\delta_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) – корені рівнянь  $\lambda(s)=0$  і  $\Delta(s)=0$  із півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

Наступні функції подамо різницями аналітичних у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$  і  $\text{Im } z < c^-$  функцій:

$$\frac{e^{iza}}{K^-(z)} \left( \Psi^+(z) - \frac{A\varepsilon e^{-a}}{1-iz} \right) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z)$$

$$\frac{e^{-iza}}{K^+(z)} \left( \Psi^-(z) - \frac{A\varepsilon}{1-iz} \right) = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z),$$

$$\frac{A\varepsilon}{K^-(z)(1-iz)} = f_1^+(z) - f_1^-(z),$$

$$\frac{A\varepsilon e^{-a}}{K^+(z)(1-iz)} = f_2^+(z). \quad (12)$$

При цьому

$$\chi_1^-(z) = K(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n e^{-s_n a}}{s_n + iz} \left( \Psi^+(is_n) - \frac{A\varepsilon e^{-a}}{1+s_n} \right),$$

$$\chi_2^+(z) = -\frac{A\varepsilon e^{-a}}{K^+(-i)(1-iz)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n e^{-s_n a}}{s_n - iz} \left( \Psi^-(-is_n) - \frac{A\varepsilon}{1-s_n} \right),$$

$$f_1^+(z) = \frac{A\varepsilon}{K^-(-i)(1-iz)}, \quad f_2^-(z) \equiv 0,$$

$$\alpha_n = \frac{s_n \Delta(s_n) K^-(-is_n)}{\lambda'(s_n)} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (13)$$

В результаті отримаємо [7]

$$\Phi^+(z) = -[f_1^+(z) + \chi_1^+(z)]/K^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = -\chi_2^-(z)/K^-(z),$$

$$\Psi^+(z) = K^+(z)[f_2^+(z) + \chi_2^+(z)],$$

$$\Psi^-(z) = -K^-(z)[f_1^-(z) + \chi_1^-(z)]. \quad (14)$$

Із поведінки функції  $\Phi^-(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$  за лемою Ватсона [8] випливає, що контактні напруження необмежені на лівому краї області контакту ( $r \rightarrow l_1 + 0$ ). Вимагаючи їх обмеженість, поставимо додаткову умову

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} iz\chi_2^-(z) = 0. \quad (15)$$

Для знаходження невідомих значень  $\Psi^+(is_k)$ ,  $\Psi^-(-is_k)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) із (13), які входять до розв'язку (14), поклавши у третій рівності (14)  $z=is_n$ , а у четвертій –  $z=-is_n$ , відносно невідомих

$$z_k^+ = \varepsilon^{-1} \Psi^+(is_k) - A\varepsilon^{-a}/(s_k+1),$$

$$z_k^- = \varepsilon^{-1} \Psi^-(-is_k) + A/(s_k-1) \quad (16)$$

одержуємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n^+ + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k e^{-s_k a}}{s_n + s_k} z_k^- = g_n^+,$$

$$z_n^- + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k e^{-s_k a}}{s_n + s_k} z_k^+ = g_n^- \quad (n=1, 2, \dots), \quad (17)$$

у якій

$$\beta_n = K^+(is_n), \quad g_n^+ = -\frac{A\beta_n e^{-a}}{K^+(-i)(s_n+1)}, \quad g_n^- = \frac{A\beta_n}{K^+(i)(s_n-1)}.$$

Регулярна нескінченна система алгебричних рівнянь (17) має експоненціально спадаючі за  $k$  коефіцієнти та відноситься до систем типу Пуанкаре – Коха. Її розв'язок знаходимо у рядах за степенями малого параметра  $\lambda = e^{-\pi a/(2\alpha)}$  [5].

Для визначення відносного розміру зони відриву  $l_1/l = e^{-a}$  із додаткової умови (15) отримуємо рівняння

$$\frac{A\varepsilon^{-a}}{K^+(-i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-s_n a} z_n^- = 0. \quad (18)$$

З умов рівноваги (2) знаходимо кут повороту штампя  $\varepsilon$  та прикладений до нього момент  $M$ :

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} P/(2Gl), \quad M = \bar{M}Pl,$$

$$\bar{\varepsilon} = k_1/\sqrt{2\pi}, \quad \bar{M} = 1 - k_1 k_2 / K^-(-i),$$

$$k_1^{-1} = A(1 - \kappa) / K^+(i) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{-1} \alpha_n e^{-s_n a} (z_n^+ - z_n^-),$$

$$k_2 = \frac{A(1 - \kappa^2)}{2K^+(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-s_n a} \left( \frac{z_n^+}{s_n - 1} - \frac{\kappa z_n^-}{s_n + 1} \right),$$

$$\kappa = K^-(-i) e^{-a} / K^-(i). \quad (19)$$

Обертаючи перше співвідношення (8), знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (7):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt \quad (0 < \xi < a). \quad (20)$$

### Контактні напруження

Обчислюючи інтеграл із (20) з використанням виразів (11) – (14) за теорією лишків і враховуючи заміни (3), (6) отримуємо контактні напруження

$$\frac{\sigma_g}{2G\varepsilon} \Big|_{g=\alpha} = -\frac{2(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m - 2) \sin 2\alpha} +$$

$$+ \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n \Delta(s_n)}{\lambda'(s_n)} \left[ \frac{l}{l_1} z_n^+ \left( \frac{r}{l_1} \right)^{-s_n - 1} - z_n^- \left( \frac{r}{l} \right)^{s_n - 1} \right]$$

$$(l_1 < r < l). \quad (21)$$

На рис. 2 суцільними кривими зображено розподіли безрозмірних контактних напружень  $\bar{\sigma} = \sigma_g / (2G\varepsilon) \Big|_{g=\alpha}$  для різних кутів  $\alpha$  розхилу клина

при значенні числа Пуассона  $m = 10/3$ . Для порівняння точковими кривими показано відповідні розподіли напружень без урахування відриву [2]. Як і очікувалось, зона відриву виявилась малою. Її відносний розмір  $l_1/l$  наведено у табл. для різних кутів  $\alpha$  і  $m = 10/3$ . Розв'язок задачі в уточненій постановці показує, що розмір  $l_1$  зони відриву більший, ніж його оціночне значення  $\delta$ , яке дорівнює розміру зони додатних контактних напружень у задачі про безвідривний контакт клина та штампа [2].

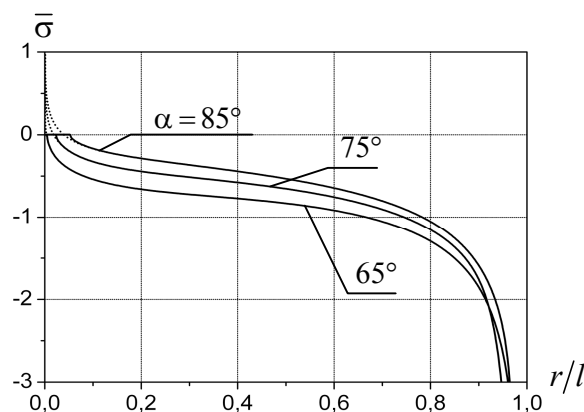


Рис. 2. Контактні напруження

Таблиця

$\alpha$	$60^0$	$65^0$	$70^0$	$75^0$	$80^0$	$85^0$
$l_1/l$	0,00029	0,0043	0,0125	0,0233	0,0365	0,0527
$\delta/l$	0,00026	0,0035	0,0099	0,0182	0,0279	0,0396

### Список використаних джерел

1. Lutchenko S. A., Popov G. Ya. On some plane contact problems of the theory of elasticity for wedges // Prikl. Mekh. – 1970. – 6, Issue 3. – P. 64-71. (in Russian).
2. Ostryk V. I., Shchokotova O. M. Plane contact problem of the indentation of a stamp into an elastic wedge // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, N 4. – P. 470-480.
3. Ganin M. P. About Fredholm integral equation with kernel depending on the difference of the arguments // Izv. Vuzov. Math. – 1963. – N 2. – P. 31-43. (in Russian).
4. Ignatenko M. M., Kirillov V. H. About the solution some problems of mathematical physics // Diff. Equations. – 1969. – 5, N 7. – P. 1296-1302. (in Russian).
5. Antipov Yu. A. Exact solution of the problem of indentation of a circular punch into the half space // Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A. Fiz.-Mat. i Tekh. Nauki. – 1987. – N 7. – P. 29-33. (in Russian).
6. Noble B. Methods Based on the Wiener–Hopf Technique. – Chelsea, New York, 1988.
7. Ostryk V., Shchokotova O. Smooth contact of punch with elastic wedge // Mashynoznavstvo. – Lviv, 2009. – N 11. – P. 3-8. (in Ukrainian).
8. Fedoryuk M. V. Asymptotics: Integrals and Series. – Moscow: Nauka, 1987. – 544 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13