УДК 539.3

Бандура Л. А.[1], аспірантка,
Вовк І. В.[2], д. ф.-м. н., проф.,
Маципура В. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.

Розсіювання хвиль на куточку

Розглядається плоска задача падіння хвилі на куточок скінченних розмірів. Досліджується силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу. Визначена залежність моменту сил тиску падаючої плоскої хвилі на поверхню смуги від хвильової ширини смуги та кута падіння.

Ключові слова: плоска хвиля, силовий вплив, хвильовий розмір, смуга.

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: elvie89@ukr.net, mnivtt@gmail.com
[2] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4

L. A. Bandura[1], PhD student,
I. V. Vovk[2], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. T. Matsipura[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Waves scattering at the corner

The problem of the plane wave incidence onto the finite size corner is considered. Influence of the incident plane wave power on the strip is investigated. Dependence of the torque generated by the incident plane wave pressure upon the surface of the stripe on the wave bandwidth as well as on the angle of incidence was defined.

Key Words: plane wave, force action, wave size, stripe.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: elvie89@ukr.net, mnivtt@gmail.com
[2] Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabova st., 8/4

Вступ

Куточок широко застосовується у фізиці і техніці. Він здатний ефективно відбивати падаючу хвилю в зворотному напрямку. Ця властивість широко використовується в архітектурній акустиці для коригування розподілу звукового поля в театральних і концертних залах. У радіотехніці та оптиці використовуються кутові відбивачі для точного вимірювання відстаней при топографічній зйомці, морській навігації та ін. Наприклад, в 1969 році американські астронавти згідно з програмою "Аполлон" встановили на Місяці дзеркальні кутові відбивачі. Опромінюючи їх лазером з Землі і приймаючи відбитий сигнал, ось вже багато років з високою точністю визначають відстань від Землі до Місяця і стежать за зміною цієї відстані.

Якщо кут розкриття куточка становитиме 180^0, то куточок перетворюється на смугу. При цьому важливо і цікаво вивчити силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу. Можна очікувати (за аналогією з диском Релея [1]), що коли напрямок падаючої плоскої хвилі буде відповідати деякому куту до площини поверхні смуги, то виникне силовий момент. Цей момент буде намагатися повернути смугу так, щоб площина її поверхні стала перпендикулярною до напрямку падаючої хвилі.

У даній роботі досліджуємо силовий вплив хвилі на смугу.

Побудова розв'язку задачі

Розглянемо плоску задачу падіння хвилі на куточок скінченних розмірів з кутом розкриву $2\theta_1$, рис. 1. Будемо вважати, що поверхні куточка акустично жорсткі, а сам куточок занурений у ідеальне середовище з густиною ρ і швидкістю звуку c. Для побудови розв'язку задачі, введемо полярну систему координат $rO\theta$. Згідно з методом часткових областей [2, 3] весь простір існу-

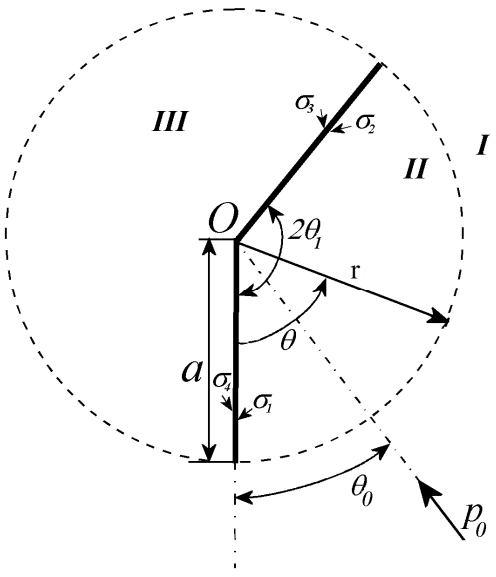

Рис. 1. Геометрія клиноподібного об'єкту (куточку)

© Л. А. Бандура, І. В. Вовк, В. Т. Маципура, 2013

вання звукового поля природно ділиться на три області: I – зовнішність кола радіуса a, тобто $r \ge a$, $0 \le \theta \le 2\pi$; II – сектор $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\theta_1$; III – сектор $0 \le r \le a$, $2\theta_1 \le \theta \le 2\pi$.

Нехай в області I на клиноподібний об'єкт (куточок) падає плоска гармонійна хвиля з одиничною амплітудою тиску

$$p_0 = \exp(-ikr\cos(\theta - \theta_0)). \qquad (1)$$

Знак "мінус" в показнику експоненти вказує на те, що напрям поширення плоскої хвилі протилежний напрямку зростання радіальної координати r. Кути θ_0 і θ визначають, відповідно, кутовий напрямок падіння хвилі і напрям на точку спостереження. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

Поле падаючої хвилі (1) можна записати у вигляді ряду [4]

$$p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr)\cos n(\theta - \theta_0), \qquad (2)$$

де $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, при $n > 0$, $J_n(kr)$ – функція Бесселя першого роду.

При взаємодії плоскої хвилі з клиновидним об'єктом утворюється розсіяне поле, яке представимо у вигляді суперпозиції циліндричних біжучих хвиль типу $H_n^{(1)}(kr)\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ і $H_n^{(1)}(kr)\sin n\theta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Комбінація кутових функцій $\cos n\theta$ і $\sin n\theta$ необхідна, оскільки кут падіння плоскої хвилі θ_0 вважаємо довільним. Отже, поле тиску в області I буде мати вигляд

$$p_{\text{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr)\cos n(\theta - \theta_0) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}\sin n\theta. \qquad (3)$$

Поле в областях II і III представимо у вигляді суперпозиції стоячих хвиль:

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J'_{\alpha_n}(ka)}\cos\alpha_n\theta, \qquad (4)$$

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(ka)}\cos\beta_n(\theta - 2\theta_1), \qquad (5)$$

де числа α_n і β_n визначаються із граничних умов на жорстких границях клина: $\partial p_{\text{II}}/\partial\theta = 0$ при $\theta = 0$, $\theta = 2\theta_1$ і $\partial p_{\text{III}}/\partial\theta = 0$ при $\theta = 2\theta_1$, $\theta = 2\pi$. Таким чином,

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{2\theta_1}, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{2(\pi - \theta_1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (6)$$

Запишемо умови спряження на границі розподілу часткових областей I і II, III (рис. 1):

$$\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = [0, 2\theta_1], \\ \dfrac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = [2\theta_1, 2\pi], \end{cases} \qquad (7)$$

$$p_{\text{I}} = p_{\text{II}}, \quad r = a, \quad \theta = [0, 2\theta_1], \qquad (8)$$

$$p_{\text{I}} = p_{\text{III}}, \quad r = a, \quad \theta = [2\theta_1, 2\pi]. \qquad (9)$$

Алгебраїчне перетворення функціонального рівняння (7) проведемо двічі: перший раз – використовуючи систему функцій $\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, другий – використовуючи систему $\sin n\theta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Обидві системи функцій ортогональні на відрізку $\theta = [0, 2\pi]$. Алгебраїчне перетворення функціонального рівняння (8) проводимо завдяки ортогональності системи функцій $\cos\alpha_n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на відрізку $[0, 2\theta_1]$. Для рівняння (9) використовуємо систему функцій $\cos\beta_n(\theta - 2\theta_1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на відрізку $[2\theta_1, 2\pi]$. В результаті отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n. Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції.

Силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу

Досліджуємо силовий вплив падаючої плоскої хвилі на смугу. У цьому випадку кут $2\theta_1 = 180^0$ (рис. 1). В якості характеристики силового впливу будемо обчислювати момент M сил тиску $p_{II}(r, \theta)$ і $p_{III}(r, \theta)$, які впливають на освітлену і тіньову поверхні смуги. Момент M розподіленої вздовж деякої поверхні сили $p(r, \theta)$ відносно точки O визначається у вигляді інтеграла

$$M = \int_{\Sigma} p(r, \theta) r dr, \qquad (10)$$

де для розглянутої задачі поверхня інтегрування складається з двох ділянок у частковій області II і двох ділянок в області III (див. рис. 1). В області II це $(\sigma_1 : r = [0, a], \theta = 0)$ і $(\sigma_2 : r = [0, a], \theta = \pi)$. В області III, відповідно, $(\sigma_3 : r = [0, a], \theta = \pi)$ і $(\sigma_4 : r = [0, a], \theta = 2\pi)$. Тоді, з урахуванням знака

моменту сил на кожній поверхні розрахункова формула буде мати вигляд

$$-M=\int_0^a[-p_{II}(r,0)+p_{II}(r,\pi)- \\ -p_{III}(r,\pi)+p_{III}(r,2\pi)]rdr. \quad (11)$$

На рис. 2 наведено графік залежності моменту сил тиску при падінні плоскої хвилі на поверхню смуги від хвильового розміру смуги $2a/\lambda$; кут падіння хвилі $\theta_0=45^0$. Як і слід було очікувати, величина моменту істотно залежить від хвильового розміру смуги. Дійсно, почина-

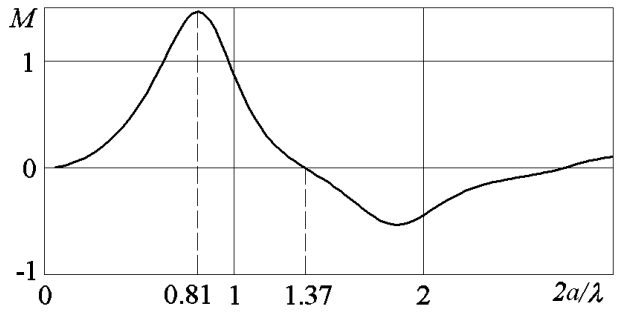

Рис. 2. Залежність моменту сил тиску падаючої плоскої хвилі на поверхню смуги від хвильової ширини смуги $2a/\lambda$; кут падіння хвилі $\theta_0=45^0$

ючи з малих значень величини $2a/\lambda$, момент збільшується и досягає максимального значення при $2a/\lambda=0{,}81$. Далі, зі збільшенням $2a/\lambda$, величина моменту зменшується і при $2a/\lambda=1{,}37$ момент дорівнює нулю. При подальшому збільшенні хвильової ширини смуги момент змінює знак на протилежний, досягає мінімуму, далі збільшуючись, стає рівним нулю і знову змінює знак. Очевидно, що з ростом величини $2a/\lambda$, значення моменту будуть осцилювати поблизу нульового рівня з все меншими значеннями локальних максимумів величини модулю моменту. Таким чином, при збільшенні хвильового розміру смуги, момент буде асимптотично прагнути до нульового значення. Така поведінка моменту має просте фізичне пояснення: поки виконується умова $2a/\lambda\le 0{,}81$, розподіл тиску на поверхні смуги не змінює знаку. При великих хвильових розмірах смуги розподіл тиску буде змінювати знак, тобто на поверхні пластини будуть ділянки, як з додатнім тиском, так і з від'ємним. Тому сила, що діє на пластину, почне зменшуватися і тим швидше, чим більша кількість ділянок буде мати різні знаки тиску.

Для прикладу, на рис. 3 показано розподіл різниці тисків і фаз на поверхні смуги для величини

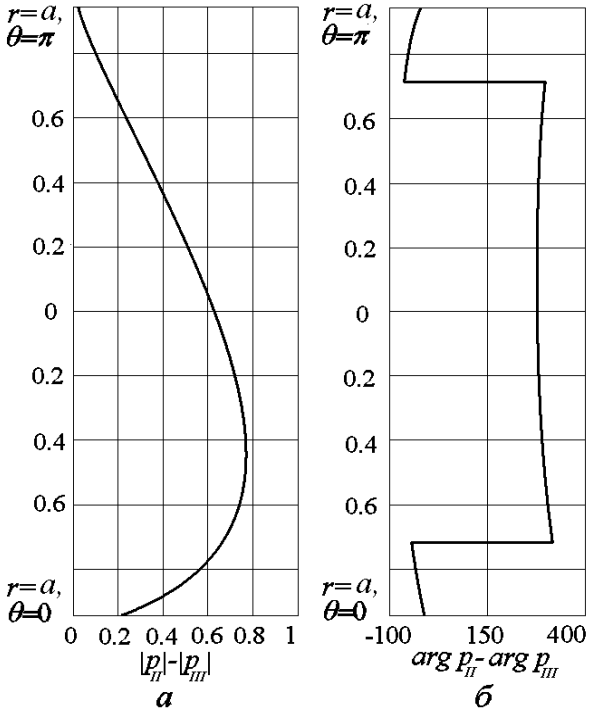

Рис. 3. Графіки різниці модулів тисків на освітленій та тіньової сторонах смуги (а) і відповідна різниця фаз цих тисків (б), $2a/\lambda=0{,}3$

$2a/\lambda=0{,}3$. Такий хвильовий розмір смуги досить малий, тому розподіл тиску по поверхні смуги не змінює знаку. Тут добре видно, що фазова характеристика практично симетрична відносно точки O (рис. 1), в той час як амплітудна крива різна для двох половинок смуги, що, природно, викличе момент, який (якщо смуга не закріплена) буде повертати смугу за годинниковою стрілкою, поки вона не займе положення перпендикулярне напрямку поширення хвилі.

На рис. 4 наведено криві залежності моменту від кута падіння θ_0 плоскої хвилі p_0 на смугу при різних хвильових розмірах смуги. Як видно,

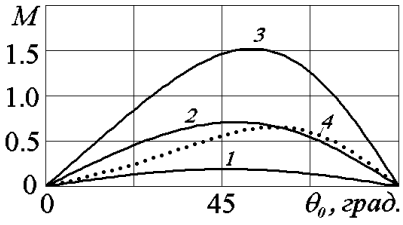

Рис. 4. Залежність моменту від кута падіння θ_0 плоскої хвилі p_0 на смугу: 1 – $2a/\lambda=0{,}3$, 2 – $2a/\lambda=0{,}536$, 3 – $2a/\lambda=0{,}81$, 4 – $2a/\lambda=1{,}08$

у міру зростання $2a/\lambda$ максимум кривих переміщується до більших значень θ_0 (для кривих 1, 2, 3, 4 максимуми моменту сил тиску відповідають наступним кутам падіння: $\theta_0 = 46^0$; 49^0; $52{,}5^0$; $56{,}5^0$). Для малої хвилевої ширини смуги $2a/\lambda < 0{,}3$, як і у випадку з диском Релея [1], максимум моменту сили тиску, що діє на смугу, відповідає куту падіння $\theta_0 = 45^0$.

Висновки

В роботі розглянуто клиноподібний об'єкт (куточок), на який падає плоска гармонічна хвиля. Задача розсіювання хвилі на куточку розв'язана на основі методу часткових областей. При побудові розв'язку задачі отримується нескінченна система алгебраїчних рівнянь другого порядку. Ця система розв'язується методом редукції.

В статті досліджено силовий вплив плоскої хвилі на смугу (куточок з кутом розкриву $2\theta_1 = 180^0$). Побудовано залежність моменту сил тиску падаючої плоскої хвилі на поверхні смуги від хвильової ширини смуги $2a/\lambda$ при куті падіння хвилі $\theta_0 = 45^0$. Встановлено, що величина моменту істотно залежить від хвильового розміру смуги. При збільшенні ширини смуги, силовий момент зростає і досягає максимального значення при $2a/\lambda = 0{,}81$. При подальшому збільшенні хвильового розміру смуги, величина моменту зменшується і дорівнює нулю при $2a/\lambda = 1{,}37$. Надалі, зі зростанням величини $2a/\lambda$ значення моменту змінюючись наближається до нуля.

Обчислена залежність моменту від кута падіння плоскої хвилі на смугу при різних хвильових розмірах смуги. Встановлено, що для малої хвилевої ширини смуги ($2a/\lambda < 0{,}3$), як і у випадку з диском Релея, максимум моменту сили тиску, що діє на смугу, відповідає куту падіння $\theta_0 = 45^0$. При зростанні $2a/\lambda$ максимальне значення моменту переміщується у бік більших значень кута падіння θ_0.

Список використаних джерел

1. *Beranek L.* Acoustic measurement. – Moscow: IIL, 1952. – 626 p. (in Russian).
2. *Grinchenko V. T., Vovk I. V.* Wave-type Problems of Scattering of Sound by Elastic Shells, – Kiev: Naukova Dumka, 1986. – 240 p. (in Russian).
3. *Grinchenko V. T.*, *Matsipura V. T.* Sound scattering on finite wedge-shaped objects. – AV. – 2003. – T. 6, № 2. – P. 23-33.
4. *Shenderov E. L.* Wave problems in hydroacoustics. – Leningrad: "Sudostroenie", 1972. – 347 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 13.05.13