

УДК 534.2

Вовк І. В.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Коновалюк Т. П.¹, м. н. с.

Особливості динаміки звукового поля при взаємодії точкових вихорів

В рамках моделі точкових вихорів та акустичної аналогії Лайтхілла виконано чисельні розрахунки та аналіз звукових полів, що генеруються трьома точковими вихорями в необмеженій ідеальній рідині при прямій та обмінній взаємодіях. Встановлено співвідношення між поворотом діаграми напрямленості звукового поля в процесі взаємодії вихорів та поворотом вихорової системи.

Ключові слова: точкові вихорі, поворот діаграми напрямленості, поворот вихорової системи.

¹ Інститут гідромеханіки НАНУ,
01057, м. Київ, в. Желябова, 8/4
e-mail: ivovk@voliacable.com, tpk_8_4@ukr.net

I. V. Vovk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
T. P. Konovalyuk¹, jun. res.

The features of the dynamics of the sound field during the point vortex interaction

Within the frameworks of the point vortex model and the acoustical Lighthill's analogy, the sound fields produced by the direct and exchange interactions of three point vortices in the ideal unbounded liquid are computed and analyzed. The relations between the directivity pattern rotation and the vortex system rotation during the vortex interaction are specified.

Key Words: point vortices, rotation of the directivity pattern, rotation of the vortex system.

¹ Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
01057, Kyiv, Zhelyabova str. 8/4
e-mail: ivovk@voliacable.com, tpk_8_4@ukr.net

1. Введение

Метод акустической аналогии Лайтхилла [1] является основой при моделировании явлений, связанных с излучением шума течениями различной геометрии. Подход, основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений (САР), стал применяться при решении задач данного класса благодаря попыткам ряда авторов формализовать теорию аэрогидродинамического шума [2]. Подход, основанный на САР, при числах Маха $M \ll 1$ дает такие же оценки излучаемой мощности, как и акустическая аналогия Лайтхилла, и позволяет с физической точки зрения объяснить асимптотику тензора напряжений Лайтхилла. Однако, данный подход, в отличие от аналогии Лайтхилла, ограничен требованием акустической компактности [2].

Анализ литературы показывает, что излучение звука вихревыми потоками – весьма сложная задача. Повысить уровень понимания физики таких явлений помогает исследование процесса звукообразования от модельных течений. Детально исследованной моделью вихревого течения является модель точечных вихрей [3]. Имеется большое количество работ, посвященных излучению

звука точечными вихрями как в безграничной среде, так и при наличии границ [4].

Целью данной статьи является установление связи между поворотом звукового поля и поворотом вихревой системы, образованной тремя точечными вихрями в безграничной идеальной среде. При моделировании звукового поля воспользуемся акустической аналогией Лайтхилла.

2. Моделирование течения и звукового поля

Взаимодействие N точечных вихрей с интенсивностями κ_α и координатами x_α, y_α в безграничной идеальной среде описывается гамильтоновой системой уравнений [3]:

$$\kappa_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \kappa_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}; \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (1)$$

с независимым явно от времени гамильтонианом H [3]. Кроме H , система (1) обладает еще тремя независимыми первыми интегралами [3], выражающими собой выполнение законов сохранения импульса и момента импульса течения, образованного вихрями. Подробный анализ системы (1) и обширная библиография по исследованию точечных вихрей содержатся, например, в [5, 6].

Как известно, задача о движении трех точечных вихрей в отсутствии границ является интегрируемой [5]. Рассмотрим вихревую систему, образованную вихрями с интенсивностями $\kappa_1 = \kappa_2 = -\kappa_3 = \kappa$. В [7, 8] детально рассмотрены все возможные типы взаимодействия вихревой пары с одиночным вихрем. Автор [7] поместил начало координат в центр завихренности и пронормировал все линейные размеры таким образом, что $H \equiv 0$. Классификация взаимодействий данной вихревой системы была построена в зависимости от единственного отличного от нуля инварианта Λ , выражающего закон сохранения импульса, и начального радиуса одного из вихрей, например, ρ_1^0 , взятого в качестве независимой переменной в решении [7]. Было найдено три типа взаимодействия: прямое взаимодействие, обменное взаимодействие и взаимный захват.

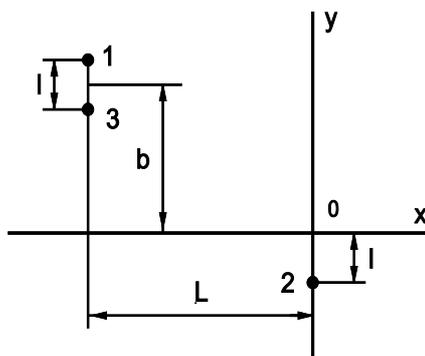


Рис. 1. Начальная геометрия модельного течения;
1,3 – падающая вихревая пара;
2 – одиночный вихрь

В данной статье рассмотрим звуковое поле в случаях прямого и обменного взаимодействий. В случае прямого взаимодействия вихревая пара 1,3 искривляет свою траекторию под действием возмущающего вихря 2, при этом целостность пары не нарушается. Результатом обменного взаимодействия есть образование новой вихревой пары 2,3 [8]. Нагляднее перейти от параметров Λ, ρ_1^0 к параметрам L, l, b (рис. 1). Полагая L и l постоянными для всех случаев, будем исследовать звуковое поле, порождаемое вихревыми взаимодействиями, в зависимости от параметра b . В исследуемой вихревой геометрии начало координат поместим в центр завихренности, все линейные размеры пронормируем таким образом, что $l = 1$, при этом в общем случае $H \neq 0$. Параметры Λ, ρ_1^0 и L, l, b связаны соотношениями:

$$\Lambda = \frac{(2b+l)l}{4B_{Gr}^2}, \quad (\rho_1^0)^2 = \frac{L^2 + (b+l/2)^2}{B_{Gr}^2}, \quad (2)$$

где

$$B_{Gr}^2 = \frac{[L^2 + (b+l/2)^2]l^2}{L^2 + (b+3l/2)^2}.$$

Рассматривались следующие значения начальных геометрических параметров: $L = -20$; $l = 1$; $-10 \leq b \leq 10$. В данной классификации есть три граничных случая, разделяющие типы взаимодействия: $b = -1$; $b = -0,5$; $b = 3,41 \dots$

Течения, формируемые вихрями в безграничной идеальной слабосжимаемой среде, порождают источники звука, являющиеся аналогом классических поперечных квадрупольей [1]. Решение уравнения Лайтхилла в форме Пауэлла [4] с нулевыми начальными условиями и учетом предположений о компактности источника и дальнего поля для флуктуаций давления имеет вид [9]:

$$p'(\vec{x}, t) = -M^2 \int_0^{t-p} \frac{x_1^2 f_1(\tau) + x_2^2 f_2(\tau) + x_1 x_2 f_3(\tau)}{[(t-\tau)^2 - \rho^2]^{1/2} (t-\tau)^2} d\tau, \quad (3)$$

где

$$\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta,$$

$$f_1(\tau) = -\sum_{\beta=1}^3 \kappa_{\beta} (y_{1\beta} y_{2\beta}'), \quad f_2(\tau) = \sum_{\beta=1}^3 \kappa_{\beta} (y_{2\beta} y_{1\beta}'),$$

$$f_3(\tau) = -\sum_{\beta=1}^3 \kappa_{\beta} (y_{2\beta}^2)''',$$

$y_{1\beta}(\tau), y_{2\beta}(\tau)$ и $y'_{1\beta}(\tau), y'_{2\beta}(\tau)$ – координаты и компоненты скорости вихря с номером β ; x_1, x_2 и θ – координаты и угол точки наблюдения. Решение представлено в безразмерном виде. В качестве масштабов обезразмеривания были взяты; κ – масштаб интенсивности вихря; B – характерный линейный масштаб в области вихревого движения; B^2/κ – характерный временной масштаб; $U = \kappa/B$ – характерная скорость в области вихревого движения; $\lambda = BM^{-1}$ – характерный линейный масштаб в области излучения; $\rho_0 U^2 / (2\pi)$ – характерный масштаб флуктуаций давления; ρ_0 – плотность в невозмущенной среде.

Отметим, что система дифференциальных уравнений (1) интегрировалась численно методом экстраполяции с переменным шагом и порядком, интегрирование в (3) выполнялось по квадратурным формулам, учитывающим интегрируемую особенность в точке $\tau = t - \rho$.

3. Анализ результатов расчета звукового поля

Результатом прямого и обменного взаимодействия есть излучение звукового импульса, частотные компоненты которого лежат в низкочастотной области [9]. Характер рассматриваемых вихревых взаимодействий таков, что вихри меняют взаимное расположение, при этом оси симметрии в системе отсутствуют. В результате в процессе вихревых движений имеет место вращение диаграммы направленности эквивалентного звукового квадрупольного поля. Поэтому логично исследовать звуковое поле с учетом его вращения [10]. Установим связь между вращением звукового поля и вращением вихревой системы для характерных типов взаимодействия. С этой целью для заданного значения параметра b фиксировался опорный лепесток, на оси которого в каждый момент времени вычислялось звуковое давление в соответствии с (3) и определялась угловая координата оси. В качестве опорного выбирался лепесток, ось которого совпадала с направлением падения вихревой пары. Разность между конечной и начальной угловыми координатами оси опорного лепестка есть полный поворот диаграммы направленности для заданного значения $b - \Delta\theta_d$. Поворот вихревой системы определялся как поворот вихря 3 ($\kappa_3 = -1$), поскольку вихрь 3 формирует как падающую, так и уходящую вихревые пары для всех исследуемых типов взаимодействия. Разность между конечной и начальной угловыми координатами вихря 3 есть полный поворот вихревой системы для заданного значения $b - \Delta\theta_3$.

Обобщение полученных численных результатов, связывающих поворот диаграммы направленности звукового поля и поворот вихревой системы, представлено на рис. 2 в виде графиков зависимости $\Delta\theta_d(b)$ и $\Delta\theta_3(b)$ от параметра b на временном интервале, соответствующем длительности излучаемого звукового импульса. Отметим, что в качестве положительного поворота принят поворот против часовой стрелки.

Римскими цифрами I-VI на рис. 2 обозначены характерные диапазоны изменения параметра b . Для случаев прямого взаимодействия $b \in [-10; -1] \cup [3,41...; 10]$ (области I и VI) – характерно вращение диаграммы направленности и вихревой системы в одном направлении: положительном (I) и отрицательном (VI). В области I полные повороты диаграммы направленности и

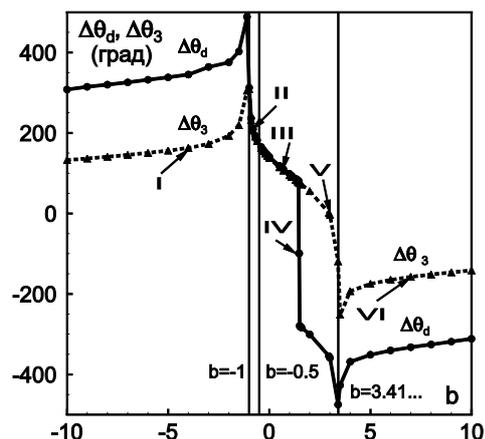


Рис. 2. Зависимость полного поворота диаграммы направленности $\Delta\theta_d(b)$ (сплошная кривая) и вихревой системы $\Delta\theta_3(b)$ (пунктирная кривая) от параметра b

вихревой системы связаны соотношением $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 + 180^\circ$; в области VI эта связь имеет вид $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 180^\circ$. Фаза звукового давления на лепестке постоянна. Таким образом, в случаях прямого взаимодействия поворот звукового поля опережает поворот вихревой системы на 180° . В случае обмена $b \in]-1; -0,5[$ (область II) звуковое поле и вихревая система вращаются сходным образом; повороты звукового и вихревого полей равны между собой: $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$. Звуковое поле на лепестке диаграммы направленности фазу не меняет и вращается в положительном направлении. Наиболее интересным диапазоном изменения параметра b есть диапазон $] -0,5; 3,41... [$ (области III-V). В этом диапазоне с увеличением b изменяется направление вращения диаграммы направленности с положительного на отрицательное, а при дальнейшем росте b происходит изменение направления вращения и вихревой системы. Данный диапазон делится на три интервала, для каждого из которых характерны особенности во вращении звукового поля и вихревой системы: $b \in] -0,5; 1,45 [$ (область III) – в этом интервале диаграмма направленности начинает совершать колебательные движения, вихревая система продолжает вращаться в положительном направлении. Связь между поворотом диаграммы направленности и вихревой системы: $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$. На узком интервале $b \in] 1,45; 1,5 [$ (область IV) направление вращения диаграммы направленности изменяется на отрицательное, вихри враща-

ются в положительном направлении: $\Delta\theta_d = -\Delta\theta_3$. Только для этого интервала характерно изменение фазы давления на лепестке диаграммы направленности с течением времени. Далее, при $b \in [1,5; 3,41...]$ (область V) вихревая система, вращаясь, совершает колебательные движения и с ростом b начинает вращаться в том же направлении, что и диаграмма направленности. В этом диапазоне изменения b поворот диаграммы направленности отличается от поворота вихрей на 360° : $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3 - 360^\circ$.

Анализ результатов также показал, что угловое распределение физических характеристик звукового поля таково, что вдоль падающей и уходящей вихревых пар всегда направлена ось одного из лепестков точечного квадруполья.

Кратко остановимся на граничных случаях. При $b = -1$ и $b = 3,41...$ вихри при взаимодействии образуют равносторонний треугольник и линейную конфигурацию, соответственно, вращающиеся с постоянными угловыми скоростями вокруг центра завихренности [7, 8]. При этом звуковые поля, вращающиеся синхронно с вихревыми системами, являются монохроматическими с частотами, равными удвоенным частотам вращения вихрей, что характерно для источников квадрупольной природы. Для течения с $b = -0,5$ вихри движутся по параллельным прямым (обмен); при этом $\Delta\theta_d = \Delta\theta_3$ – повороты звукового и вихревого поля равны между собой.

4. Заключение

В рамках модели точечных вихрей и акустической аналогии Лайтхилла выполнены численные расчеты и анализ звуковых полей, генерируемых точечными вихрями при прямом и обменном типах взаимодействия в широком диапазоне геометрических параметров. Получены следующие основные результаты:

1. При прямом и обменном взаимодействиях имеет место явление вращения диаграммы направленности звукового поля, что обусловлено изменением взаимного расположения вихрей при их движении в сочетании с отсутствием в системе осей симметрии, а также вращением вихрей как единого целого.

2. Поворот диаграммы направленности в процессе взаимодействия либо равен повороту вихревой системы, либо противоположен ему, либо отличается на величину, кратную 180° .

3. Фазовое распределение физических характеристик звукового поля при его зарождении и спадании таково, что их максимальные (минимальные) значения всегда связаны с направлением падающей и уходящей вихревых пар.

Список использованных источников

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc. – 1952. – **A2**. – P. 564-587.
2. *Crighton D. G.* Basic Principles of Aerodynamic Noise Generation // Prog. Aerospace Sci. – 1975. – **16**, N 1. – P. 31-96.
3. *Batchelor G. K.* Introduction to fluid dynamics. – Moscow: Mir, 1973. – 758 p. (in Russian).
4. *Howe M. S.* Theory of Vortex Sound. – Cambridge: University Press, 2003. – 216 p.
5. *Aref H.* Intergable, chaotic, and turbulent vortex motion in two dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1983. – **15**. – P. 345-389.
6. *Meleshko V. V., Konstantinov M. Yu.* Dynamics of the vortex structures. – Kiev: Naukova Dumka, 1993. – 279 p. (in Russian).
7. *Grobli W.* Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Zurich. – 1877. – **22**. – P. 37-81, 129-165.
8. *Konovalyuk T. P.* Classification of the interactions of the vortex pair with the single vortex in ideal fluid // Gidromekhanika. – 1990. – **62**. – P. 64-71. (in Russian).
9. *Konovalyuk T. P., Meleshko V. V.* Sound radiation by the point vortex system // Pliki. Gidromekhanika. – 1996. – **70**. – P. 41-52. (in Russian).
10. *Konovalyuk T. P.* The features of the structure of the sound field during the point vortex interactions // Akust. Visnyk. – 2012. – **15**. – N 1. – P. 38-58. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13