

УДК 539.3

Гарт Э. Л.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., доц.

### Сравнительный анализ двух моделей упругопластического деформирования пористых сред при использовании проекционно-итерационных схем МКЭ

Проведен сравнительный численный анализ моделей плоской деформации и плоского напряженного состояния в задачах упругопластического деформирования пористых сред. Применяются проекционно-итерационные схемы реализации вариационно-сеточного метода конечных элементов. Рассмотрены “ячейки разрушения” в виде двух пор круговой и эллиптической формы. Исследовано взаимодействие пор при упругопластическом деформировании.

Ключевые слова: пористая среда, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы, численный анализ.

<sup>1</sup> Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара, 49010, г. Днепропетровск, просп. Гагарина, 72, e-mail: hart@ua.fm

#### Постановка задачи

Модели плоских задач механики деформируемого твердого тела широко используются при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС), определяя его основные особенности [1-3]. При высоких уровнях нагрузки необходимо учитывать пластические деформации. Эффективными для решения многочисленных задач деформирования структурированных сред, включающих поры, трещины, включения, пластин и оболочек с отверстиями являются проекционно-итерационные модификации вариационно-сеточного метода конечных элементов (МКЭ) [4-11].

Рассматривается пористая среда в случае одноосного растяжения (рис. 1). Заметим, что при исследовании НДС вблизи пор, которые являются локальными концентраторами напряжений, область возмущения напряженного состояния значительно меньше характерных размеров тел. Использование экстремальных принципов для таких областей следует проводить с учетом соотношений, изложенных в [12].

Выделим элементарную “ячейку разрушения” в виде двух пор круговой и эллиптической формы. Проблема определения НДС для плоских за-

E. L. Hart<sup>1</sup>, PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

### Comparative analysis of two elastoplastic deformation models for porous media in projective-iterative schemes of finite element method

The comparative numerical analysis of plane deformation model and plane stress state model for deformation problems of porous media is developed. The projective-iterative schemes realization of variational-grid finite element method is used. The cells in view of two pores of circular and elliptic form are considered. The interaction of pores under elastoplastic deformation is investigated.

Key Words: porous media, finite element method, projective-iterative schemes, numerical analysis.

<sup>1</sup> Oles' Gonchar National University of Dnepropetrovsk, 49010, Dnepropetrovsk, Gagarin avenue, 72, e-mail: hart@ua.fm

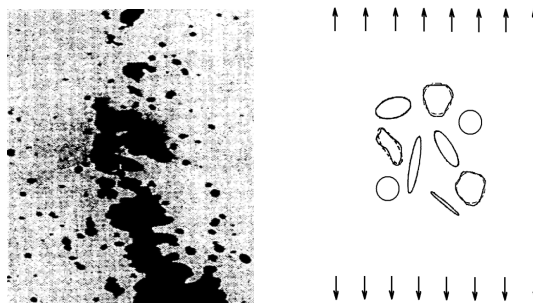


Рис. 1. Пористая среда

дач без учета пластических деформаций сводится к минимизации функционала потенциальной энергии на классе непрерывно-дифференцируемых в области  $\Omega$  функций  $u(x, y), v(x, y)$ :

$$I(x, y) = \int_{\Omega} \left\{ (2\mu + \lambda) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} (p_x u + p_y v) dS, \quad (1)$$

где  $u(x, y), v(x, y), p_x(x, y), p_y(x, y)$  – проекции векторов перемещений и нагрузки на оси  $Ox$  и  $Oy$ ;  $\lambda, \mu$  – постоянные Ляме. Здесь для случая

плоской деформации и плоского напряженного состояния постоянные Ляме вычисляются соответственно по формулам [2]:

$$\lambda_1 = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad \mu_1 = G, \quad \lambda_2 = \frac{2G\nu}{1-\nu}, \quad \mu_2 = G,$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига,  $G = E/[2(1+\nu)]$ .

Для модели плоской деформации (в этом случае  $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ) при отсутствии массовых сил имеем уравнения равновесия Ляме в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ ,  $\mu = G$ ,  $\Delta = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ ,  $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ ,  $\nabla^2 v = \partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2$ .

Деформации определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu' \sigma_y)/E' = [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]/2G, \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu' \sigma_x)/E' = [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]/2G, \\ \varepsilon_{xy} &= (1+\nu')\tau_{xy}/E' = \tau_{xy}/2G, \end{aligned}$$

где  $E' = E/(1-\nu^2)$ ,  $\nu' = \nu/(1-\nu) = \nu_1/(1-2\nu_1)$ ,  $\nu_1 = \nu/(1+\nu)$ .

В соответствии с моделью плоского напряженного состояния (в этом случае  $\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ) уравнения Ляме имеют ту же форму (2), при этом вместо  $\lambda$  в (2) вводится параметр

$$\begin{aligned} \lambda' &= 2\lambda G/(\lambda + 2G) = (1-2\nu)\lambda/(1-\nu) = \\ &= \nu E/(1-\nu^2) = 2\lambda G/(1-\nu). \end{aligned} \quad (3)$$

Деформации для этой модели определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \quad \varepsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \\ \varepsilon_{xy} &= \tau_{xy}/(2G). \end{aligned}$$

Оценка деформаций для моделей плоской деформации и плоского напряженного состояния при конкретном коэффициенте Пуассона  $\nu$  дана в [3].

Для обобщенного плоского напряженного состояния (на основе этой модели определяется НДС пластины толщиной  $2h$ ) уравнения Ляме имеют вид (2), при этом  $\lambda$  заменяют на  $\lambda'$  (3),  $\nabla$ ,  $u$ ,  $v$  – на  $\bar{\nabla}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ . Здесь вместо перемещений  $u$ ,  $v$  вводятся их средние значения по толщине

$$\bar{u} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v dz.$$

Вычисляя разность между величинами интенсивности деформаций для случаев плоского напряженного состояния и плоской деформации, получаем, что она положительна.

### Метод решения

Для решения задачи минимизации функционала (1) применяются проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ [6-11]. Построение таких схем проводится следующим образом. Исходная экстремальная задача аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью ( $n=1, 2, \dots$ ) дискретных экстремальных задач. Каждая из полученных задач решается с применением некоторого итерационного метода, в частности, метода последовательной верхней релаксации [4], но не до конца. Начиная с произвольного, достаточно грубого разбиения ( $n=N$ ), строится лишь несколько ( $k_n$ ) приближений к точке минимума соответствующей функции многих переменных. Последнее полученное приближение интерполируется на более мелкую конечноэлементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума следующей, ( $n+1$ )-ой, функции многих переменных. Процесс продолжается до достижения заданной точности вычислений.

Упругопластическое НДС определяется на основе методов упругих решений [13], к которым могут быть отнесены методы переменных параметров упругости и метод дополнительных нагрузок. При этом строится процесс последовательных приближений, в каждом из которых решается неоднородная задача теории упругости. В методе переменных параметров упругости при использовании деформационной теории пластичности НДС в каждом приближении определяется из нелинейных соотношений [10, 11]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G_*} \left( \sigma_{ij} - \frac{3\nu_*}{1+\nu_*} \delta_{ij} \sigma \right),$$

где

$$\begin{aligned} G_* &= \frac{E_*}{2(1+\nu_*)}, \quad E_* = \frac{3E}{2E\psi + 1 - 2\nu}, \\ \nu_* &= \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}, \quad \psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}, \end{aligned}$$

$\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – напряжения и деформации;  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  – их интенсивности;  $\sigma$  – среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для первого приближения полагается  $E_{*1} = E$ ,  $\nu_{*1} = \nu$ , определяются напряжения  $\sigma_{ij1}^e$  и их интенсивность  $\sigma_{i1}^e$  (значок  $e$  соответствует расчёту на основе теории упругости), вычисляется  $\sigma_{i1}$  (по диаграмме  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ ) и  $\psi_1 = 3\varepsilon_{i1}/2\sigma_{i1}$ . Во втором приближении решается задача теории упругости при  $E_{*2} = \sigma_{i1}/\varepsilon_{i1}$ , для вычисления  $\nu_{*2}$  используется  $\psi_1$  и т. д. Решение проводится до совпадения соседних приближений с заданной точностью (при расчётах используется условие  $E_{*(n)} \approx E_{*(n-1)}$ ).

### Численный анализ

Приведем результаты конечноэлементного анализа распределения интенсивности деформаций для двух моделей деформирования при различных конфигурациях и расположении отверстий, моделирующих поры. Расчёты проведены на ПК Tugion 64 × 2 (2 GHz, 2 × 512 Kb L2 cache) с 2 Gb оперативной памяти для пористой среды, поведение которой определяется диаграммой деформирования, аналогичной диаграмме для алюминиевого сплава Д16Т.

Зоны пластических деформаций (ПД), где  $\varepsilon_i > \varepsilon_s$  ( $\varepsilon_s$  – интенсивность деформаций, соответствующая условному пределу текучести  $\sigma_s$ ), возникают в местах концентрации напряжений и при повышении нагрузки или при уменьшении расстояния между порами сливаются. На рис. 2 показаны такие зоны для двух пор круговой формы при нагрузке  $p_y = 125 \text{ МПа}$ ,  $r_1/r_2 = 2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $l/r_1 = 4,24$  (рис. 2, а);  $l/r_1 = 2,83$  (рис. 2, б, в) ( $r_1, r_2$  – радиусы большей и меньшей пор соответственно,  $l$  – расстояние между центрами пор,  $\alpha$  – угол между прямой, проходящей через центры пор, и осью  $Ox$ ). На рис. 2, б показаны зоны ПД для модели плоской деформации (модель 1), на рис. 2, в – для модели плоского напряженного состояния (модель 2).

На рис. 3 показаны зоны ПД для двух пор круговой и эллиптической формы при нагрузке  $p_y = 125 \text{ МПа}$ ,  $r/a = 1$ ,  $\alpha = \beta = 45^\circ$ ,  $l/r = 1$  ( $r$  – радиус круговой поры,  $a$  – большая полуось эллипса, ограничивающего пору,  $\beta$  – угол между большой полуосью эллиптической поры и осью  $Ox$ ). Рис. 3, а и 3, б соответствуют моделям 1 и 2. Картина распределения интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , соответствующей определенным уровням  $\varepsilon_i$ , приведена на рис. 4.

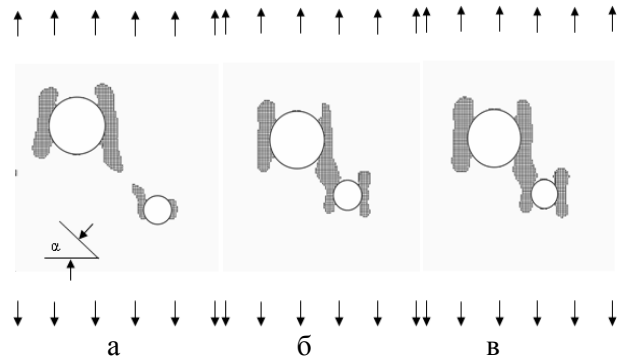


Рис. 2. Зоны ПД для пор круговой формы

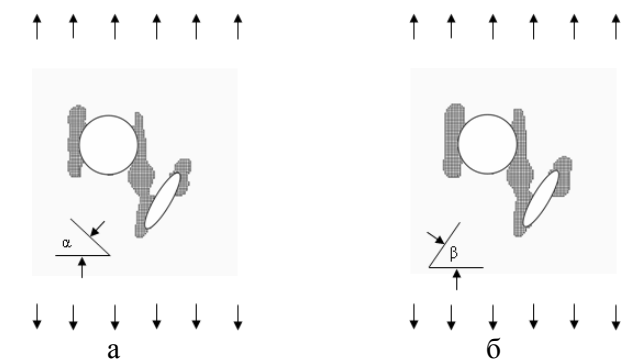


Рис. 3. Зоны ПД для пор круговой и эллиптической формы

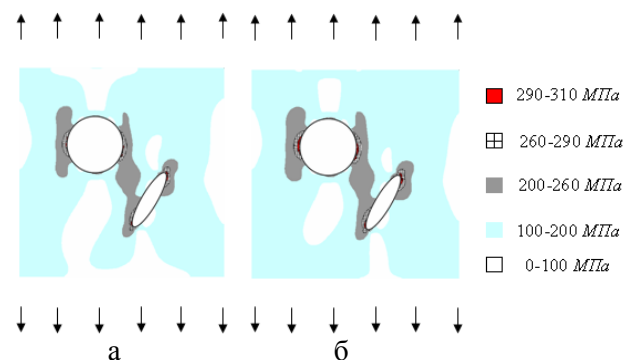


Рис. 4. Распределение интенсивности напряжений для пор круговой и эллиптической формы

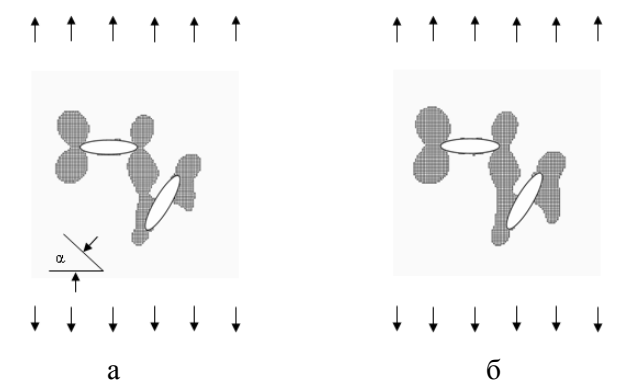


Рис. 5. Зоны ПД для пор эллиптической формы при  $\alpha = \beta = 45^\circ$

На рис. 5 показаны зоны ПД для двух пор эллиптической формы при нагрузке  $p_y = 125 \text{ МПа}$ ,  $a_1/a_2 = 1$ ,  $\alpha = \beta = 45^\circ$ ,  $l/a_1 = 2,83$ . Рис. 5, а и 5, б соответствуют моделям 1 и 2.

### Выводы

Проведен анализ двух моделей деформирования (плоской деформации и плоского напряженного состояния) при исследовании НДС пористой среды. Для модели плоского напряженного со-

стояния зоны пластических деформаций имеют большую величину при одних и тех же нагрузках.

Варьирование формы пор, их размеров, расстояния между ними позволяет исследовать динамику процесса трансформации полей остаточных деформаций, взаимовлияние пор для различных материалов (различные диаграммы деформирования материалов). Такой анализ дает возможность прогнозировать возникновение очагов разрушения в плоскодеформируемых пористых средах.

### Список использованных источников

1. *Timoshenko S. P.* Course of elasticity theory. – Kiev: Naukova Dumka, 1972. – 508 p. (in Russian).
2. *Leibenzon L. S.* Course of elasticity theory. – Moscow – Leningrad: OGIZ, 1947. – 464 p. (in Russian).
3. *Demidov S. P.* Elasticity theory. – Moscow: Vysshaja shkola, 1979. – 432 p. (in Russian).
4. *Samarskii A. A., Nikolaev E. S.* Methods for solving finite-difference equations. – Moscow: Nauka, 1978. – 592 p. (in Russian).
5. *Kluge R.* Ein Projektions-Iterationsverfahren bei Fixpunktproblemen und Gleichungen mit monotonen Operatoren // Monatsber. Dtsch. Acad. Wiss. – Berlin, 1969. – B. 11, No 8-9. – S. 599-609.
6. *Hart E. L.* Projective-iterative modifications of finite element method in boundary-value problems of elasticity theory // Dop. NAN Ukrainy. – 2008. – № 6. – P. 56-61. (in Russian).
7. *Hart E. L.* Finite element analysis of plane deformable media with inclusions // Visn., Ser. Mechanika, Dnipropetr. Univ. im. Olesja Gonchara. – 2011. – Issue 15, vol. 2. – P. 39-47. (in Russian).
8. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Numerical modelling of behaviour of plane deformable structural media // Mathematic modelling in mechanics of deformable solids and structures. Methods of boundary and finite elements: international conference, September 28-30, 2011. – Sankt-Peterburg, Russia: proceedings. – 2011. – P. 37-39. (in Russian).
9. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Numerical analysis of elastoplastic deformation of structured media // Dop. NAN Ukrainy. – 2012. – № 5. – P. 49-56. (in Russian).
10. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Ryabokon' S. A.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – Vol. 78, Issue 1. – P. 181-197.
11. *Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Ryabokon' S. A.* Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Strength of Materials. – 2013. – Vol. 45, No 1. – P. 5-16.
12. *Lin'kov A. M., Novozhilov V. V.* Exstremal principles for infinite // Progress in mechanics of deformable media. – Moscow: Nauka, 1975. – P. 350-354. (in Russian).
13. *Il'yushin A. A.* Plasticity. – Moscow – Leningrad: OGIZ, 1948. – 376 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13