

УДК 539.3

Говоруха В. Б.¹, д. ф.-м. н., доц.,
Ходанен Т. В.¹, к. ф.-м. н.,
Лобода В. В.¹, д. ф.-м. н., проф.

Об электрических и магнитных граничных условиях на берегах трещины в пьезоэлектромагнитном материале

Рассмотрена плоская задача для пьезоэлектромагнитного пространства с трещиной с конечной электрической и магнитной проницаемостями. Проблема сведена к векторной задаче линейного сопряжения, которая решена точно. Найдены аналитические выражения для напряжений, электрических и магнитных смещений, их коэффициентов интенсивности, а также для скорости освобождения энергии. Проиллюстрирована зависимость интенсивности электрического и магнитного потоков через трещину от параметров нагружения.

Ключевые слова: трещина, пьезоэлектромагнетик, конечная проницаемость.

¹ Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара, 49010, г. Днепропетровск, пр. Гагарина, 72
e-mail: govorukhavb@yahoo.com,
loboda@mail.dsu.dp.ua, thod@ua.fm

1. Введение

Актуальность изучения влияния разных видов внешних нагрузок – электрических, магнитных и механических – на параметры разрушения новых композитных материалов, характеризующихся разными пьезоэлектрическими, пьезомагнитными свойствами, очевидна. Электроупругое состояние пьезоэлектрических тел как с дефектами, так и без них изучалось в монографиях [1, 2].

Использование на практике материалов с выраженными одновременно пьезоэлектрическим и пьезомагнитным эффектами обусловило появление ряда работ по изучению трещин в такого рода материалах под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков [3-5].

Важным фактором является проблема правильного выбора граничных условий на берегах трещины, которая применительно к пьезоэлектрическому материалу впервые рассматривалась

V. B. Govorukha¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
T. V. Hodanen¹, PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
V. V. Loboda¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

On electric and magnetic boundary conditions on the crack faces in piezoelectromagnetic material

A plane problem for piezoelectromagnetic space with a crack of finite electric and magnetic permeability is considered. The problem is reduced to the vector Hilbert problem which is solved exactly. The analytical expressions for the stresses, electric and magnetic fluxes, their intensity factors, as well as for the energy release rate are found. Illustrates The dependencies of the electric and magnetic fluxes through the crack with respect to the loading parameters are illustrated.

Key Words: crack, piezoelectromagnetic, limited permeability.

¹ Oles Gonchar National University of Dnipropetrovsk, 49010, Dnipropetrovsk, Gagarina avenue, 72
e-mail: govorukhavb@yahoo.com,
loboda@mail.dsu.dp.ua, thod@ua.fm

в [6]. Что же касается пьезоэлектромагнитного материала, то проблема выбора электрических и магнитных условий на берегах трещины обсуждалась в [7].

Данная работа посвящена решению плоской задачи для трещины в пьезоэлектрическом/ пьезомагнитном пространстве под действием магнито-электро-механической нагрузки с учетом наиболее общего вида электрических и магнитных граничных условий на берегах трещины.

2. Формулировка основных соотношений

Рассматривается пьезоэлектромагнитный материал, определяющие соотношения для которого имеют вид [3]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s - h_{sij} H_s, \\ D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \alpha_{is} E_s + d_{is} H_s, \\ B_i = h_{iks} \varepsilon_{ks} + d_{is} E_s + \gamma_{is} H_s, \end{cases} \quad (1)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i , B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукций; E_i , H_i – напряженности электрического и магнитного полей, c_{ijks} – упругие константы, e_{iks} – пьезоэлектрические, h_{iks} – пьезомагнитные, d_{is} – электромагнитные, α_{is} , γ_{is} – диэлектрические и магнитные проницаемости.

Уравнения равновесия в отсутствии массовых сил и свободных зарядов таковы:

$$\sigma_{ij,j} = 0, D_{i,i} = 0, B_{i,i} = 0. \quad (2)$$

Выражения для деформаций, напряженности электрического и магнитного полей имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), E_i = -\varphi_{,i}, H_i = -\phi_{,i}, \quad (3)$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, φ , ϕ – электрический и магнитный потенциалы.

3. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается трещина на промежутке $(-a, a)$ в бесконечном пьезоэлектромагнитном пространстве. На бесконечности действуют равномерно распределенная растягивающая нагрузка, электрический и магнитный потоки σ^∞ , D^∞ , B^∞ соответственно (рис. 1). Предполагается, что все

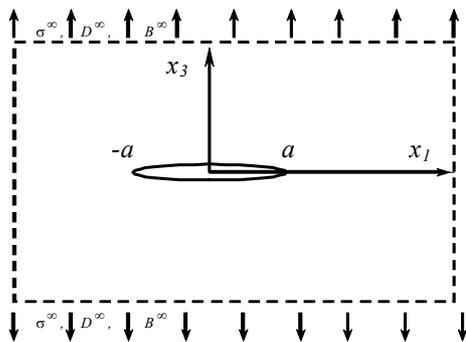


Рис. 1. Сечение пьезоэлектромагнитного пространства с трещиной

поля не зависят от координаты x_2 , а на берегах трещины выполняются равенства: $\sigma_{33} = 0$, $D_3 = D_0$ и $B_3 = B_0$, где D_0 и B_0 пока неизвестные величины.

Воспользуемся представлениями [5]:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\{\mathbf{W}^+(x_1) + \mathbf{W}^-(x_1)\}, \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (5)$$

где $\mathbf{t}^{(1)} = [\sigma_{31}, \sigma_{33}, D_3, B_3]^T$, $\mathbf{V} = [u_1, u_3, \varphi, \phi]^T$, $\mathbf{G} = [G_{ij}]_{i,j=1,3,4,5}$ и скобки $\langle \rangle$ означают скачок соответствующей функции при переходе через плоскость $x_3 = 0$.

При отсутствии сдвиговой нагрузки имеем: $W_1(z) \equiv 0$. Тогда соотношения (4), (5) можно записать в виде

$$\mathbf{t}_0^{(1)} = \mathbf{G}_0\{\mathbf{W}_0^+ + \mathbf{W}_0^-\}, \quad (6)$$

$$\langle \mathbf{V}'_0 \rangle = \mathbf{W}_0^+ - \mathbf{W}_0^-, \quad (7)$$

где $\mathbf{t}_0^{(1)} = [\sigma_{33}, D_3, B_3]^T$, $\mathbf{V}_0 = [u_3, \varphi, \phi]^T$, $\mathbf{G}_0 = [G_{ij}]_{i,j=3,4,5}$, $\mathbf{W}_0 = [W_3, W_4, W_5]^T$.

Снося σ^∞ , D^∞ , B^∞ на трещину и рассматривая только локальное электромагнитоупругое состояние, получаем, что на трещине

$$\mathbf{G}_0\{\mathbf{W}_0^+ + \mathbf{W}_0^-\} = \hat{\mathbf{t}} \text{ на } (-a, a), \quad (8)$$

где

$$\hat{\mathbf{t}} = [-\sigma^\infty, -D^\infty + D_0, -B^\infty + B_0]^T.$$

Из (8) следует, что

$$\mathbf{W}_0^+ + \mathbf{W}_0^- = \mathbf{G}_0^{-1} \hat{\mathbf{t}} \text{ на } (-a, a), \quad (9)$$

причем $\mathbf{W}(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$.

Решение последней задачи линейного сопряжения имеет вид

$$\mathbf{W}_0(z) = -\frac{1}{2} \mathbf{G}_0^{-1} \hat{\mathbf{t}} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - b^2}} - 1 \right). \quad (10)$$

На основании (10) получаем для $|x_1| \geq a$:

$$\mathbf{t}_0^{(1)} = 2\mathbf{G}_0\mathbf{W}_0(x_1) = -\hat{\mathbf{t}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} - 1 \right). \quad (11)$$

Из соотношений (9) следует, что на $(-a, a)$

$\mathbf{W}_0^- = \mathbf{G}_0^{-1} \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{W}_0^+$. Тогда на основании (7) имеем

$$\langle \mathbf{V}'_0 \rangle = 2\mathbf{W}_0^+(x_1) - \mathbf{G}_0^{-1} \hat{\mathbf{t}} = -\mathbf{G}_0^{-1} \hat{\mathbf{t}} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}.$$

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$\langle \mathbf{V}_0 \rangle = i\mathbf{G}_0^{-1} \hat{\mathbf{t}} \sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

Обозначая $\mathbf{\Lambda} = -i\mathbf{G}_0^{-1}/4$, приходим к следующему выражению:

$$\langle \mathbf{V}_0 \rangle = -4\Lambda \hat{\mathbf{t}} \sqrt{a^2 - x_1^2}. \quad (12)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень, електричної і магнітної індукції введемо наступним образом:

$$\mathbf{K} = [K_1, K_4, K_5]^T = \hat{\mathbf{t}} \sqrt{\pi a}. \quad (13)$$

Тогда скорость освобождения энергии

$$G = [K_1, K_4, K_5] \Lambda [K_1, K_4, K_5]^T. \quad (14)$$

Учтем, что для наполнителя трещины $D_3 = \varepsilon_a E_a$, $B_3 = \gamma_a H_a$. Это означает, что

$$D_0 = -\varepsilon_a \frac{\langle \phi \rangle}{\langle u_3 \rangle}, \quad B_0 = -\gamma_a \frac{\langle \phi \rangle}{\langle u_3 \rangle}. \quad (15)$$

С учетом представления (13) соотношения (15) принимают вид

$$D_0 = -\varepsilon_a \frac{(\Lambda \hat{\mathbf{t}})_2}{(\Lambda \hat{\mathbf{t}})_1}, \quad B_0 = -\gamma_a \frac{(\Lambda \hat{\mathbf{t}})_3}{(\Lambda \hat{\mathbf{t}})_1}. \quad (16)$$

Но

$$\Lambda \hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sigma^\infty \\ -D^\infty + D_0 \\ -B^\infty + B_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Lambda_{11}\sigma^\infty - \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) - \Lambda_{13}(B^\infty - B_0) \\ -\Lambda_{21}\sigma^\infty - \Lambda_{22}(D^\infty - D_0) - \Lambda_{23}(B^\infty - B_0) \\ -\Lambda_{31}\sigma^\infty - \Lambda_{32}(D^\infty - D_0) - \Lambda_{33}(B^\infty - B_0) \end{Bmatrix}.$$

Подставляя компоненты последнего представления в (16), получаем

$$\begin{cases} D_0 \{ \Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0) \} = \\ = -\varepsilon_a \{ \Lambda_{21}\sigma^\infty + \Lambda_{22}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{23}(B^\infty - B_0) \}, \\ B_0 \{ \Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0) \} = \\ = -\gamma_a \{ \Lambda_{31}\sigma^\infty + \Lambda_{32}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{33}(B^\infty - B_0) \}. \end{cases} \quad (17)$$

Соотношения (17) представляют собой нелинейную систему алгебраических уравнений относительно D_0 и B_0 . После определения D_0 и B_0 , из (9) находится $\hat{\mathbf{t}}$, а далее по формуле (12) – $\langle \mathbf{V}_0 \rangle$, по формуле (11) – $\mathbf{t}_0^{(1)}$, по формуле (13) – \mathbf{K} , а по формуле (14) – G .

Система (17) имеет несколько решений. Подходящим будет то, для которого трещина остается открытой, т. е. выполняется условие $\langle u_3 \rangle > 0$. На основании (12)

$$\begin{aligned} \langle u_3(x_1, 0) \rangle &= -4(\Lambda \hat{\mathbf{t}})_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} = \\ &= 4 \{ \Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0) \} \sqrt{a^2 - x_1^2}. \end{aligned}$$

Максимальное раскрытие в середине трещины выражается формулой

$$\langle u_3(0, 0) \rangle = 4a \{ \Lambda_{11}\sigma^\infty + \Lambda_{12}(D^\infty - D_0) + \Lambda_{13}(B^\infty - B_0) \}.$$

4. Численные результаты и их анализ

Расчеты проводились для пьезоэлектрического/пьезомагнитного материала $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ со следующими значениями физических констант: $c_{11} = 226$, $c_{13} = 124$, $c_{33} = 216$, $c_{44} = 44$ (ГПа), $e_{31} = -2,2$, $e_{33} = 9,3$, $e_{15} = 5,8$ (Кл/м²), $\alpha_{11} = 56,4 \cdot 10^{10}$, $\alpha_{33} = 63,5 \cdot 10^{10}$ (Кл²/Н·м²), $h_{31} = 290$, $h_{33} = 350$; $h_{15} = 275$ (Н/А·м), $\gamma_{11} = 810 \cdot 10^{-7}$, $\gamma_{33} = 835 \cdot 10^{-7}$ (Н·с²/Кл²).

Характеристики наполнителя трещины выбирались следующими: $\varepsilon_a = \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (Кл²/Н·м²), $\gamma_a = \gamma_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Н·с²/Кл²), что соответствует воздуху, а также $\varepsilon_a = 81\varepsilon_0$, $\gamma_a = 0,99992\gamma_0$ для воды. Предполагалось, что электрический и магнитный потоки на бесконечности имеют интенсивности $D^\infty = 0,01$ Кл/м², $B^\infty = -7,65 \cdot 10^{-3}$ Вб/м². В табл. 1 показаны результаты расчета электрического и магнитного потоков через трещину, а также раскрытие трещины в ее средней точке, соответствующие различным σ^∞ , для наполнителя-воздуха, а в табл. 2 – значения этих же величин для наполнителя-воды.

Таблица 1

Зависимости электрического и магнитного потоков через трещину и раскрытия трещины для воздушного наполнителя трещины

σ^∞, Pa	$D_0, \text{Кл/м}^2$	$B_0, \text{Вб/м}^2$	$u_3(0,0), \text{м}$
10^5	0,00998	-0,00795	$2,98 \cdot 10^{-8}$
10^6	0,00981	-0,0106	$2,97 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^6$	0,00911	-0,0225	$1,47 \cdot 10^{-6}$
10^7	0,00831	-0,0369	$2,93 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^7$	0,00695	-0,0645	$5,79 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^7$	0,00405	-0,140	$1,41 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

То же, что в табл. 1, для наполнителя-воды

σ^{∞}, Pa	$D_0, Кл/м^2$	$B_0, Вб/м^2$	$u_3(0,0), м$
10^5	0,00999	-0,00791	$2,73 \cdot 10^{-8}$
10^6	0,00992	-0,0103	$2,73 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^6$	0,00961	-0,0208	$1,36 \cdot 10^{-6}$
10^7	0,00923	-0,0337	$2,73 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^7$	0,00847	-0,0595	$5,46 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^7$	0,00619	-0,134	$1,36 \cdot 10^{-5}$

Из результатов, приведенных в табл. 1 и 2, видно, что при малых значениях напряжений электрический и магнитный потоки через трещину незначительно отличаются от своих значений на удалении от трещины. В то же время рост напряжений ведет к существенному изменению как указанных факторов, так и раскрытия трещины. Наполнитель трещины также оказывает влияние на расчетные факторы, однако это влияние не есть существенным.

Список использованных источников

1. Grinchenko B. T., Ulitko A. F., Shulga N. A. Mechanics of coupled fields in the elements of constructions. – Editor Guz A. N. – К.: Naukova Dumka, 1989. – V. 5. – 280 p.
2. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A. Electromagnetoelasticity. – Gordon and Breach Science Publishers, New York. – 1988. – 471 p.
3. Sih G. C., Song Z. F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃ – CoFe₂O₄ composite // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – V. 39. – P. 209-227.
4. Kaloerov S. A., Boronenko O. I. Two-dimensional magneto-elastic problem for a multiply

5. Выводы

Рассмотрена трещина с конечной электрической и магнитной проницаемостями в пьезоэлектрическом/пьезомагнитном пространстве под действием удаленной механической нагрузки, электрического и магнитного потоков. Путем представления всех факторов через комплексные потенциалы проблема сведена к задаче линейного сопряжения (8), для которой получено точное решение (11). С использованием этого решения получены выражения для напряжений, электрических и магнитных смещений (12), их коэффициентов интенсивности (14), а также для скорости освобождения энергии (15). Путем решения нелинейных уравнений (18) получены зависимости электрического и магнитного потоков в области трещины от удаленных механической нагрузки, электрического и магнитного смещений.

connected piezomagnetic body // Int. Appl. Mech. – 2005. – V. 41, No. 10. – P. 1137-1147.

5. Herrmann K. P., Loboda V. V., Khodanen T. V. An interface crack with contact zones in piezoelectric/piezomagnetic materials // Archive of Applied Mechanics. – No. 80. – 2010. – P. 651-670.
6. Polovinkina I. B., Ulitko A. F. On the theory of equilibrium of piezoceramic bodies with cracks // Thermal Stresses in the Construction's Elements: Republican Interdepartmental Research Issue. – Charkov: Higher School - 1978. – No. 18. – P. 10-17.
7. Wang B.-L., Mai Y.-W. Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – V. 44. – P. 387-398.

Поступила в редколлегию 31.03.13