

УДК 539.5

Гуржій О. А.¹, д. ф.-м. н., с. н. с.
Шалденко О. В.¹, аспірант

Інтенсивні режими адвекції виділеної рідини в течії Діна

Розглядається задача адвекції виділеної рідини усередині криволінійної труби з круговим поперечним перерізом у наближенні Діна. Аналіз різних критеріїв хаотичної та регулярної адвекції показує, що в розглянутій течії існує критичне значення осевої швидкості, за якого настає суттєва інтенсифікація процесів адвекції.

Ключові слова: течія Діна, хаотична адвекція, біфуркаційна діаграма.

¹ Національний технічний університет України «КПІ», 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 5
e-mail: o.shaldenko@gmail.com

В современных европейских инновационных технологиях стали активно использоваться различные смесители и теплообменники на ламинарных течениях [1]. Недавнее открытие явления детерминированного хаоса позволило рассматривать проблему переноса скалярных полей в ламинарных течениях с новых концептуальных позиций [2]. Применение в различных технических устройствах хаотических течений с малыми числами Рейнольдса позволяет существенно снизить затраты энергии на их формирование при высоких значениях коэффициентов тепло- и массопереноса. Изучение особенностей таких течений является сегодня одним из важных направлений в прикладной гидромеханике.

Процессы переноса скалярных полей в жидкостях представляет собой сложное природное явление, включающее два важнейших процесса: перенос поля в связи с наличием поля скорости, и диффузия в связи с молекулярным движением [3]. Анализ геометрических и временных масштабов различных течений позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема переноса скалярного поля (или выделенной жидкости) сводится к анализу деформации границ выделенной жидкости в заданном поле скорости. Такая задача в научной литературе [4] получила название задачи об адвекции.

В настоящей работе рассматривается задача об адвекции пассивной жидкости в криволинейной

A. A. Gourjii¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.,
O. V. Shaldenko¹, PhD student

Intensive advection regime of separated fluid in Dean flow

The advection problem of separated fluid inside a curved tube with a circular cross section in Dean approximation is considered. Analysis of various criteria of chaotic and regular advection shows that a critical value of the axial velocity, at which the significant intensification of advection takes place, is exist in the considered flow.

Key Words: Dean flow, chaotic advection, bifurcation diagram.

¹ National Technical University of Ukraine "KPI", 03056, Kiev, 37 Pobedy adv., bld. #5
e-mail: o.shaldenko@gmail.com

трубе постоянного радиуса R с неизменным круговым поперечным сечением радиуса a и угловой протяженностью $\theta = \pm\pi$ (рис. 1). Соседние сегменты трубы периодически смещаются друг относительно друга на угол $\chi = \pm\pi/2$. Целью исследования является определение областей интенсивной адвекции в поперечном сечении криволинейной трубы.

В предположении $a \ll R$ для течения с малыми числами Рейнольдса Re (малые числа Діна $Dn = (a/R) Re^2$) решение задачи разделяется на течение Пуазейля вдоль прямолинейной трубы и поперечное течение, которое после нормировки на характерную осевую скорость W и радиус трубы a , может быть представлено в виде [5]:

$$u_x = \frac{\alpha}{1152} \left\{ h(r) + \frac{y^2}{r} h'(r) \right\},$$
$$u_y = \frac{\alpha}{1152} \frac{xy}{r} h'(r), \quad w = \frac{\beta}{4} (1 - r^2). \quad (1)$$

где

$$h(r) = (1 - r^2/4)(1 - r^2)^2, \quad \alpha = Dn C^2,$$
$$\beta = \frac{Dn C}{Re}, \quad C = -\frac{a^2}{RW\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Здесь p – поле давления, а μ – динамическая вязкость жидкости, и $r^2 = x^2 + y^2$.

Утверждение равенства скорости движения пассивной жидкой частицы и скорости течения в точке, в которой она находится, приводит к урав-

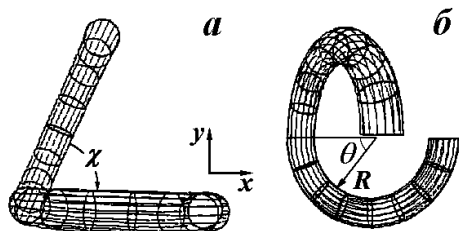


Рис. 1. Геометрия задачи

нению адвекции [4]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2)$$

В дальнейшем интегрирование (2) по времени можно изменить на интегрирование вдоль осевой координаты θ . Разделив первые два уравнения (1) на третье уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{G}{1152} (4 - 5x^2 - 23y^2 + x^4 + 8x^2y^2 + 7y^4), \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{G}{192} xy(3 - x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (3)$$

где $G = \alpha / \beta$. Эти уравнения описывают движение жидких частиц по мере их продвижения вдоль трубы по угловой координате θ .

Движение жидкости вдоль трубы описывается системой уравнений (3). Она движется в первом сегменте трубы по замкнутым траекториям, образуя два циркуляционных течения в верхней и нижней частях поперечного сечения трубы (сплошные линии на рис. 2). На следующем сегменте (первый период, $N = 1$) циркуляционные течения поворачиваются на угол χ (штриховые линии на рис. 2). На следующих двух сегментах

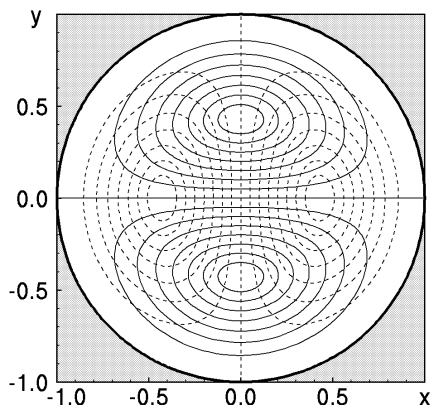


Рис. 2. Траектории жидких частиц в поперечном сечении трубы

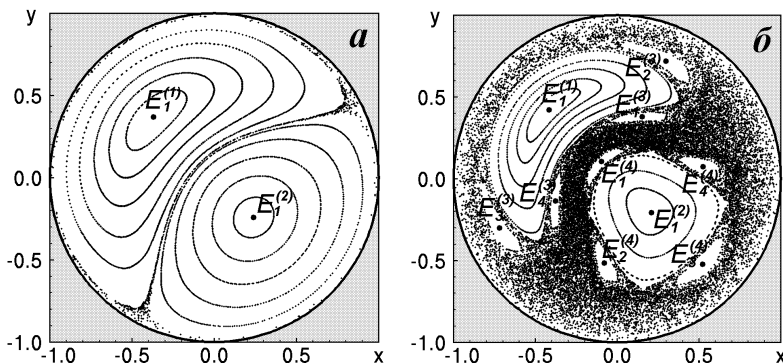


Рис. 3. Сечение Пуанкаре для жидких частиц

траектории жидких частиц имеют аналогичную структуру.

При анализе режимов адвекции жидкостей исследователи пользуются основным критерием [6]: хаотическая (интенсивная) адвекция – процесс, при котором в двумерном случае длина границ выделенной жидкости растягивается во времени по экспоненциальному закону.

Для идентификации хаотического режима движения отдельных жидких частиц в работе используются различные критерии [6, 7], основанные на анализе фазовых траекторий, сечения Пуанкаре, периодических точек течения, наибольшего показателя Ляпунова для отдельных жидких частиц в рассматриваемом течении.

На рис. 3 показано сечение Пуанкаре для различных значений G . Дискретизация фазовых траекторий проводилась после прохождения жидкой частицы двух сегментов, составляющих период течения. При $G = 30.0$ (рис. 3, а), сечение Пуанкаре является регулярным во всей области течения. Анализ результатов показывает, что в течении имеются две периодические эллиптические точки ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$) первого порядка. При $G = 50.0$ в сечении Пуанкаре появляются зоны хаотического движения частиц (рис. 3, б). В области, прилегающей к эллиптическим периодическим точкам ($E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$), появляются периодические точки четвертого порядка, обозначенные на рисунке $E_i^{(3)}$ и $E_i^{(4)}$, где $i = 1, \dots, 4$.

Бифуркационная диаграмма периодических точек первого порядка при изменении параметра G показана на рис. 4, на котором координаты z^* представляют собой координаты точек на прямой $y = -x$ в поперечном сечении трубы. Для малых значений G течение обладает только двумя эллиптическими (E) периодическими точками. При $G = 177$ происходит первая бифуркация, при которой образуются две пары эллиптических и гиперболических (H) точек. В дальнейшем (при $G =$

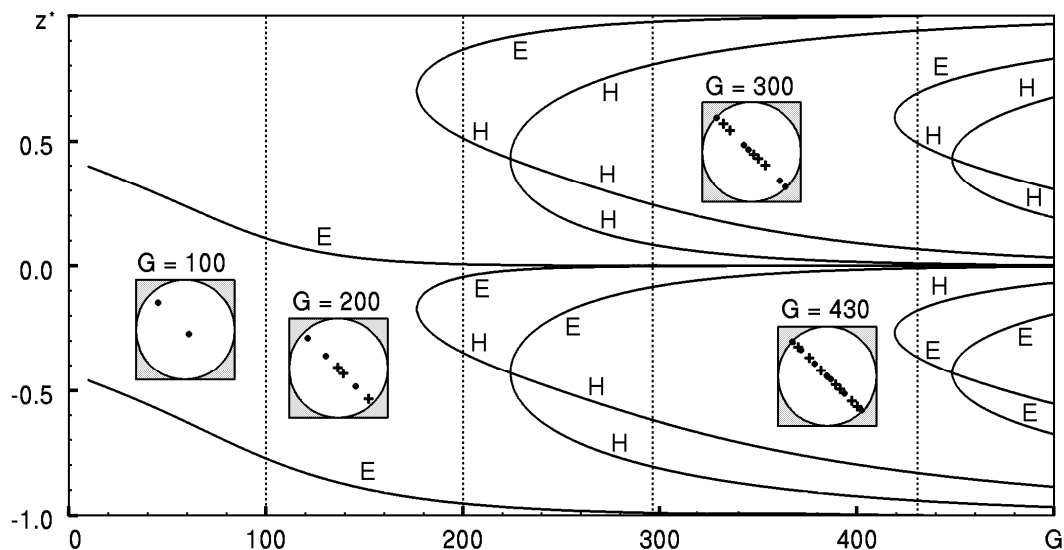


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма течения Дина при $\chi = \pi/2$, $\theta_0 = \pi$

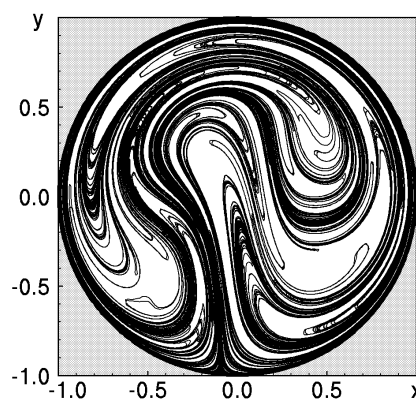
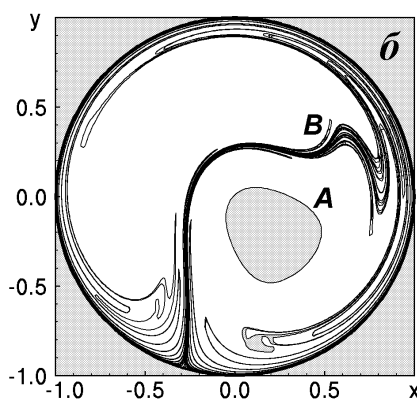
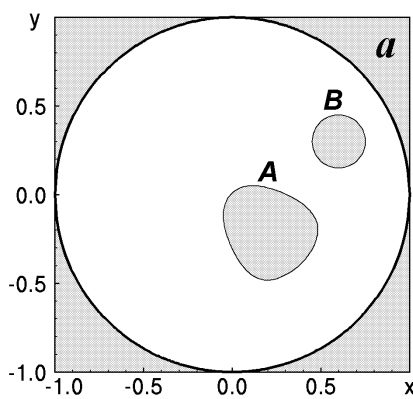


Рис. 5. Адвекция выделенной жидкости внутри регулярного и хаотического сечений Пуанкаре

Рис. 6. Пример интенсивного режима адвекции

= 225) происходит образование одной эллиптической и трех гиперболических периодических точек. Схемы пространственного положения периодических точек при некоторых значениях G показаны на рисунке, на котором эллиптические периодические точки нанесены сплошными кружочками, а гиперболические периодические точки – крестиками.

В рассматриваемом течении можно обнаружить области выделенной жидкости, которая в течение одного периода возвращается в свое начальное положение. Выделим в начальный момент объем A жидкости, сформированный регулярным сечением Пуанкаре около эллиптической периодической точки E на рис. 3, б при $G = 50.0$. Одновременно выделим малую круговую область B (рис. 5, а) радиуса $R_0 = 0.15$ с центром в точке $(x_c = 0.6, y_c = 0.3)$, которая расположена в хаотической зоне сечения Пуанкаре. Процесс деформации

выделенного контура в рассматриваемом поле скорости рассчитывался на основе метода кусочной сплайн-интерполяции [8].

Результаты численного моделирования процесса адвекции выделенной жидкости показывают, что жидкость A в течение каждого периода возвращается в свое начальное положение. С другой стороны, выделенная жидкость B подвержена сильному растяжению вдоль границы поперечного сечения. Положение выделенных жидкостей в сечении при $N = 12$ показано на рис. 5, б.

При увеличении осевой скорости течения жидкости, интенсивность процесса адвекции существенно увеличивается. На рис. 6 показан случай адвекции жидкости при $G = 90.0$. В начальном сечении выделенная жидкость занимала положение, аналогичное выделенной жидкости A рис. 5, а. Уже после 5 периодов границы выделенной жидкости сильно растянулись, и подкрашенная жидкость разместилась по всему попе-

речному сеченню. Положення виделенної жидкості при $N=10$ показано на рис. 6. Такий режим адвекції відноситься до інтенсивного (хаотического) режиму.

На рис. 7 показано змінення нормированої довжини $L(z)/L(0)$ контурів виделенної жидкості для характерних режимів адвекції виделенної жидкості по мірі продвиження її вдоволь осі труби, $z = R\theta$. Цифрами 1 і 2 показані криві для контурів областей виделенної жидкості (рис. 5, б), розположених в регулярній і хаотическій областях сечення Пуанкаре (рис. 3). Крива 3 ілюструє залежність для випадку на рис. 6. Видно, що криві 2 і 3 зростають по експоненціальній залежності, що відповідає інтенсивному режиму адвекції жидкості всередині криволинійної труби.

Исследования показали, что при увеличении приложенного градиента давления к сегментированной криволинейной трубе постоянного кругового поперечного сечения топологические свойства течения существенно усложняются. При этом происходит последовательность бифуркаций, которая сопровождается появлением системы эллиптических и гиперболических точек различного порядка. Анализ структуры сечения Пуанкаре, выполненный для системы пассивных жидких частиц, и расположение периодических точек рассматриваемого течения, позволяют оценить размеры области в поперечном сечении трубы для интенсивной и регулярной адвекции выделенной жидкости.

Численное моделирование процесса адвекции выделенной жидкости показывает, что при уве-

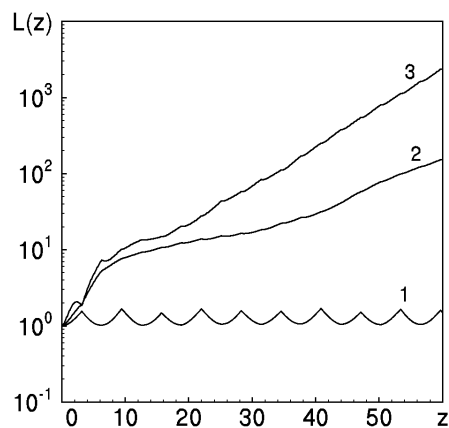


Рис. 7. Змінення довжин контурів по мірі продвиження вдоволь труби

личенні градиента давления до сегментам труби площини областей застоїних зон, оточуючі еліптичні періодическі точки течення, суттєво зменшуються.

В роботі показано, що процеси адвекції для жидкості, розположених в початковий момент в областях, прилегаючих до гіперболическим періодическим точкам, протікає, по мірі продвиження жидкості вдоволь періодическі сегментованої труби, в інтенсивному режимі. Частиці виделенної жидкості можуть рухатися в хаотическому режимі. При цьому довжина контура виделенної пасивної жидкості, при продвиженні її вдоволь труби, розтягується по експоненціальній залежності, що відповідає хаотическому режиму процеса адвекції виделенної жидкості.

Список использованных источников

1. Aref H. The development of chaotic advections // *Phys. Fluids*. – 2002. – V. 14. – P. 1315-1325.
2. Mashelkar R. A. Seamless chemical engineering science: the emerging paradigm // *Chem. Eng. Sci.* – 1995. – V. 50, N 1. – P. 1-22.
3. Lambe H. *Hydrodynamics* / M.-L.: GITTL, 1947. – 929 p.
4. Aref H. Stirring by chaotic advection // *JFM*. – 1984. – V. 143. – P. 1-23.
5. Jones S. W., Thomas O. M., Aref H. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // *JFM*. – 1989. – V. 209. – P. 335-357.
6. Ottino J. M. *The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport* / Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 683 p.
7. Moon F. *Chaotic vibrations* / M.: Mir, 1990. – 312 p. (in Russian).
8. Gourjii A. A., Meleshko V. V., G. J. F. van Heijst. Method of piece spline-interpolation in the advection problem of passive impurity in known velocity field // *Dopovidi NAN Ukraine*. – 1996. – N 8. – P. 54-62. (in Russian).

Надійшла до редколегії 31.03.13