

УДК 539.595

Дідківська О. М.¹, магістр

Коливання резервуару з рідиною для від'ємних довжин маятничого підвісу

Розглянуто задачу про вимушені гармонічні коливання циліндричного резервуару частково заповненого рідиною для від'ємних довжин маятничого підвісу (резервуар розташовується вище точки підвісу маятника). Отримано графіки амплітуд всіх форм коливань рідини для різних частот та довжин підвісів. Проаналізовано характер коливального руху для білярезонансної частоти коливань резервуару з рідиною.

Ключові слова: вимушені гармонічні коливання, циліндричний резервуар, маятничий підвіс.

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: olena.mukolajivna.didkivska@gmail.com

Вступ

Метою даної роботи була розробка моделі і дослідження особливостей поведінки рідини з вільною поверхнею, що частково заповнює резервуар у формі кругового циліндра. Система резервуар – рідина підвішена на математичному маятнику таким чином, що точка закріплення резервуару розташована нижче центра мас системи (випадок від'ємної довжини підвісу). Резервуар здійснює вимушені коливання за гармонічним законом: $\alpha = \alpha_0 \sin \theta t$, де α – кут відхилення осі циліндра від вертикальної осі, α_0 – амплітуда коливань, θ – частота коливань.

Для дослідження цієї задачі використаємо варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського та метод Канторовича. Це дозволяє звести модель системи до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів.

Механічна система (рис. 1) складається із циліндричного резервуару кругового поперечного перерізу з абсолютно твердими стінками, який частково заповнений ідеальною нестисливою рідиною, що знаходиться під дією сил поверхневого натягу. В чисельних прикладах розглядаються коливання, що відбуваються в одній площині.

O. M. Didkivska¹, master

Oscillations of reservoir with liquid for negative lengths of pendulum suspension

The problem on forced harmonic oscillations of a cylindrical tank partially filled with liquid for negative lengths of pendulum suspension (reservoir located above the hanging pendulum) was considered. Graphs for amplitudes of all modes of fluid for different frequencies and lengths of suspensions were determined. The nature of oscillatory motion for near-resonant oscillation frequency of the system liquid-tank was analyzed.

Key Words: forced harmonic vibrations, cylindrical tank, pendulum suspension.

¹ The Taras Shevchenko Kiev National University, 01601, Kyiv, Volodymyrska street, 64
e-mail: olena.mukolajivna.didkivska@gmail.com

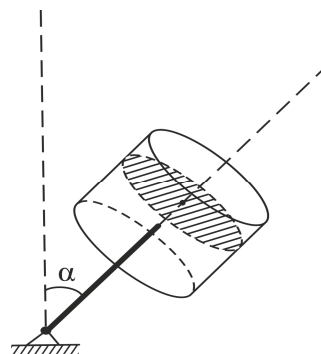


Рис. 1. Циліндр на маятничому підвісі від'ємної довжини

Математична модель системи

В початковий момент часу рідина незбурена. Тоді, враховуючи її ідеальність, за теоремою Лагранжа в усі наступні моменти часу її рух буде потенціальним. Тому введемо потенціал швидкостей у вигляді

$$\Phi(\vec{r}, t) = \varphi + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega},$$

де φ – потенціал хвильового руху рідини, $\vec{\varepsilon}$ – радіус-вектор центра незбуреної вільної поверхні рідини в умовно нерухомій системі координат, \vec{r} – радіус-вектор довільної точки в зв'язаній з резервуаром системі координат, $\vec{\omega}$ – кутова швид-

кість тіла в умовно нерухомій системі координат, $\bar{\Omega}$ – потенціал Стокса – Жуковського.

Тоді кінетична енергія і, як наслідок, функція Лагранжа буде містити інформацію стосовно хвильового, поступального, кутового рухів та їх попарного взаємозв'язку:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left(\bar{\nabla} \varphi + \dot{\bar{\varepsilon}} + \bar{\nabla} (\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega}) \right)^2 d\tau.$$

Для застосування принципу Гамільтона – Остроградського застосуємо наступну форму представлення розв'язку задачі, для попереднього виключення кінематичних граничних умов (метод Канторовича):

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(x, y)$$

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(x, y) \frac{ch \varpi_n(z+H)}{\varpi_n sh \varpi_n H}$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + \sum_n \bar{q}_n(t) \psi_n(x, y) \frac{ch \varpi_n(z+H)}{\varpi_n sh \varpi_n H}$$

де $z = \xi(x, y, t)$ – рівняння вільної поверхні, $\psi_n(x, y)$ – система власних форм коливань з параметром ϖ_n (ϖ_n – параметр рівняння Гельмгольца, розв'язаного в циліндричних координатах, що знаходиться з рівняння $J_1'(\varpi_n r/R) = 0$ при $r = R$), H – рівень незбуреної поверхні рідини в резервуарі, a_n, b_n, \bar{q}_n – невідомі функції часу. При цьому b_n і \bar{q}_n є залежними і виключаються з кінематичних умов, а a_n – амплітудні параметри коливань рідини.

Виходячи з загальних законів нелінійної механіки, будемо шукати залежність величин b_i і \bar{q}_j від a_k у вигляді

$$b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + b_i^{(3)} + b_i^{(4)},$$

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i^{(1)} + \bar{q}_i^{(2)} + \bar{q}_i^{(3)},$$

де цифрові індекси в круглих дужках відповідають порядком малості величин. Таким чином виразимо b_i та q_i через квадратури функцій ψ_i і $\bar{\Omega}_0$. В результаті для визначення амплітудних параметрів коливань рідини, її поступального руху, а також її кутового руху отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, лінійну відносно других похідних невідомих величин:

$$\sum_{n=1}^N p_{mn} \ddot{\alpha}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{mn} \ddot{\alpha}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{mn} \ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_m.$$

У випадку розглядуваних вимушених гармоніч-

них коливань резервуару поступальний рух відсутній, кутовий задається. Тому замість $N+6$ рівнянь одержимо систему із N рівнянь, в які як задані увійдуть параметри кутового руху тіла і відповідні сили інерції.

Аналіз вимушених коливань резервуара з рідиною

Дана модель динаміки коливань резервуара з рідиною для від'ємних довжин маятнікового підвісу була чисельно реалізована на ЕОМ за допомогою мови Fortran. Було визначено амплітуди всіх форм коливань рідини для різних частот та довжин підвісу на амплітуді кутових коливань резервуару 0,003; висота циліндра – 1,5 R ; глибина – R .

Для всіх частот та довжин підвісу на початку руху характерним є певний перехідний процес, який згодом переходить в усталений рух. На рис. 2 зображена перша (основна) форма коливань, що ілюструє даний факт.

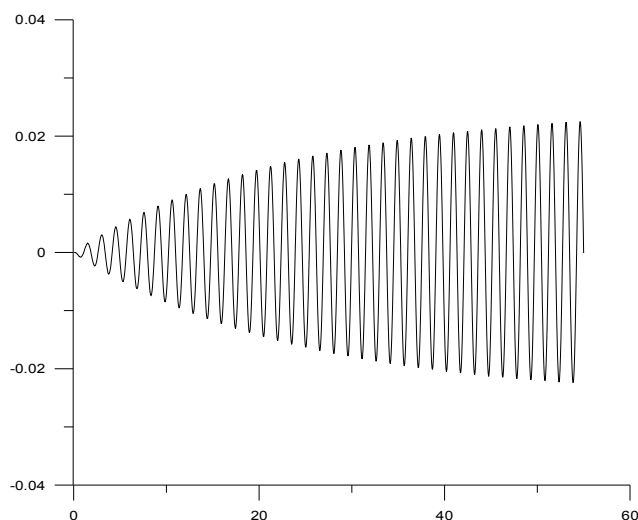


Рис. 2. Залежність в часі амплітуди першої форми коливань при довжині підвісу $-0,1$ і частоті $4,14$

Порівнявши її з наступним графіком (для додатної довжини підвісу, рис. 3), яскраво видно різницю в максимальних амплітудах, що простежується для всіх розглядуваних випадків.

Амплітуди всіх форм коливань для від'ємних довжин математичного маятника менші ніж при його додатних довжинах. Наприклад, для білярезонансної частоти $4,14$ максимальна амплітуда при від'ємному підвісі складає $0,3835$, а при додатному дорівнює $0,4061$. Різниця складає більше $5,5\%$.

На рис. 4 і 5 зображено відповідно першу і другу форми коливань резервуару для білярезонансної частоти $4,14$.

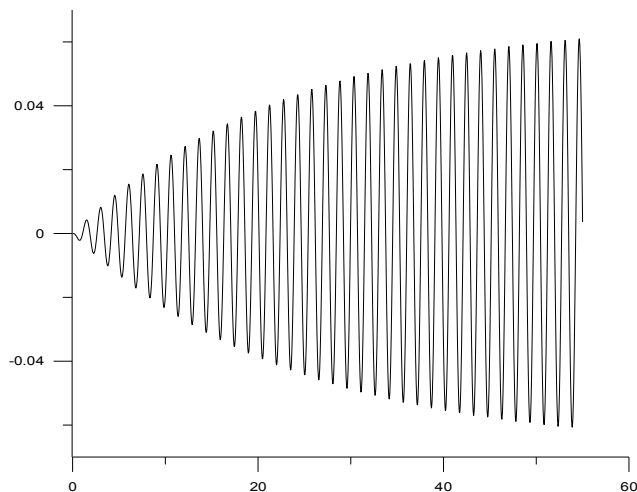


Рис. 3. Залежність в часі амплітуди першої форми коливань для довжини підвісу 0,1 та частоти 4,14

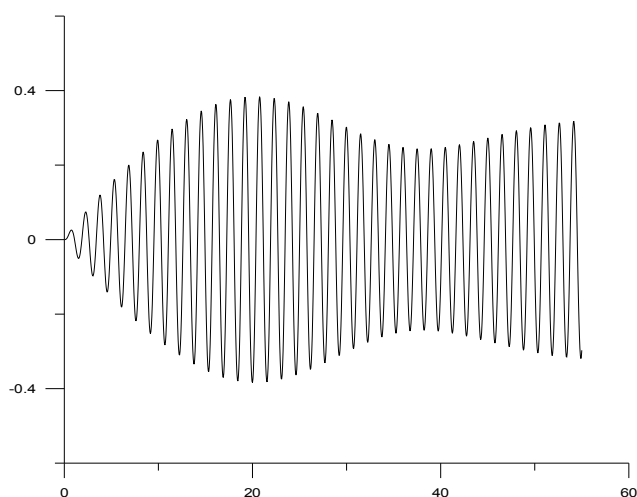


Рис. 4. Залежність в часі амплітуди першої форми коливань для довжини підвісу -4 та частоти 4,14

Як видно, відбувається значне збільшення амплітуди коливань для першої форми – більш ніж в 120 разів, для другої форми – майже в 20 разів. Також різниця між амплітудами першої і другої форм коливань складає близько 86% амплітуди першої форми. Суттєва зміна частотної залежності не відбувається, так як внесок першої форми дуже великий. Друга ж форма (яка є показником

нелінійності в системі) чітко ілюструє суттєвий прояв нелінійних властивостей поверхневого хвилеутворення в системі (несиметрія профілей хвиль, висота горба хвилі перевершує глибину впадини).

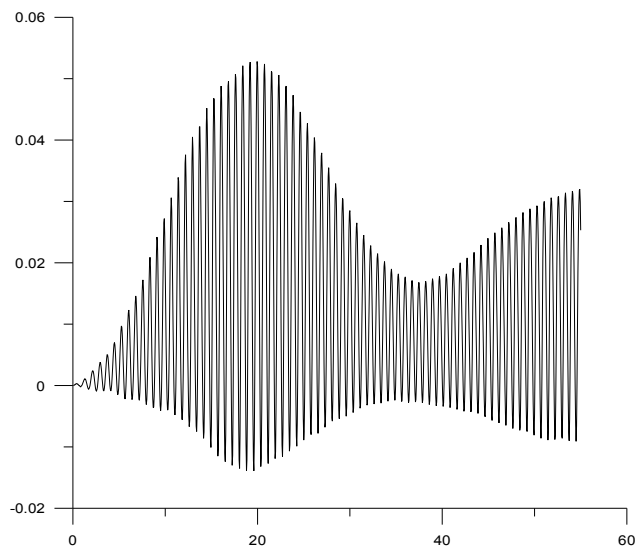


Рис. 5. Залежність в часі амплітуди другої (осесиметричної) форми коливань для довжини підвісу -4 та частоти 4,14

Висновки

В роботі розглянуто задачу про гармонічні коливання циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною для від'ємних довжин маятникового підвісу. Чисельно реалізовано динамічну модель даної системи. Досліджено вимушені коливання резервуару з рідиною для різних від'ємних довжин підвісу. Проведено порівняння для додатних та від'ємних довжин. Показано, що в околі резонансних частот збурення в системі характеризуються суттєвим проявом нелінійних властивостей поверхневого хвилеутворення.

Список використаних джерел

1. *Mikishev G. N., Rabinovich B. I.* Dynamics of rigid body with empties, partially filled by liquid. – Moscow: Mashinostroeniye, 1968. – 532 p. (in Russian).
2. *Narimanov G. S., Dokuchaev L. V., Lukovskiy I. A.* Nonlinear dynamics of spacecraft with liquid. – Moscow: Mashinostroeniye, 1977. – 208 p. (in Russian).
3. *Limarchenko O. S., Yasinskiy V. V.* Nonlinear dynamics of structures with liquid. – Kiev: National Technical University of Ukraine “KPI”, 1997. – 338 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 20.05.13