

УДК 519.9

Зражевський Г. М.¹, к. ф.-м. н., доц.

Визначення оптимальних параметрів збудження форми коливань балки

У роботі розглянута модельна задача про коливання шарнірно закріпленої балки, що знаходиться під впливом деякого числа періодичних зосереджених сил. Метою дослідження є визначення оптимальної кількості сил та їх характеристик – місця прикладання, амплітуди і фази коливань, які забезпечують із заданою точністю найкращим чином наближення заданих форми і поточної фази коливань балки в заданому частотному діапазоні. Після часткового аналітичного обернення, задача зведена до умовної багатоекстремальної задачі мінімізації основного функціоналу, яка не піддається аналітичному розв'язанню. У другій частині роботи, побудований її дискретний еквівалент, що формулюється у вигляді змішаної умовної задачі неопуклої мінімізації. Дискретна задача розв'язана чисельно з використанням багатфункціонального пакета PSG (Matlab Interface), наданого American Optimal Decision, USA.

Ключові слова: форма коливань, оптимальні характеристики збудження.

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова 4 е
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

Постановка задачі

Прогини балки $w(x, t)$, що виконує усталені коливання під дією I точкових сил, прикладених в точках ξ_i з амплітудами F_i і фазами δ_i , визначаються як розв'язок крайової задачі для рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^I F_i \cos(\omega t + \delta_i) \delta(x - \xi_i),$$
$$x \in (0, L), t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} w(0, t) = w(L, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t), \quad t \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (2)$$

де E, I, ρ – відповідно, модуль Юнга, момент інерції поперечного перерізу і щільність балки.

G. M. Zrazhevsky¹, PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Determination of the optimal parameters of the beam waveform actuation

In the present paper we consider a model problem of the vibrations of hinged beam under the influence of a number of periodic concentrated forces. The problem is to determine the optimal number of forces and their characteristics – the fulcrum, the amplitude and phase oscillations, which provide a given accuracy of the best approximation of a given shape and point-wise phase vibrations of the beam in a given frequency range. After partial analytical treatment, the problem is reduced to the problem of minimizing the conditional Multiple-core functionality, not amenable to analytical solution. In the second part, a discrete equivalent is built which is formulated as a mixed conditional non-convex minimization problem. The discrete problem is solved numerically using a multifunctional package PSG (Matlab Interface), provided by American Optimal Decision, USA.

Key Words: vibrations, waveform, optimal actuation.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

Визначимо параметри силового впливу (кількість сил, їх амплітуди, фази і точки прикладання), щоб усталені коливання балки найкращим чином (у сенсі деякого критерію) відповідали заданим параметрам форми коливання

$$\bar{W}(x, t) = A(x) \cos(\omega t + D(x)). \quad (3)$$

Розглядаючи тільки вимушені моногармонійні коливання і ввівши в розгляд функцію Гріна $G(x, t; \xi)$, що задовольняє однорідним граничним умовам, розв'язок задачі (1), (2) можна представити у вигляді

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^I F_i G(x; \xi_i; k) \cos(\omega t + \delta_i), \quad (4)$$

де

$$G(x, t; \xi) = G(x; \xi; k) \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix},$$

а $G(x; \xi; k)$ задовольняє рівняння з хвильовим числом k ($k^4 = \omega^2 \rho / EI$). Введемо безрозмірні параметри (далі хвилю опускаємо для зручності)

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{w} = w / \max_{x \in (0, L)} A(x),$$

$$\tilde{k} = k/k_1, \quad \tilde{F}_i = F_i / (2k_1^3 EI \max_{x \in (0, L)} A(x)), \quad (5)$$

де $k_1 = \pi/L$ – хвильове число першої згинної форми коливань балки. Нев'язка задачі – двохфункціональна і має вигляд

$$R_{\Omega}(x, t) = w(x, t) - \bar{W}(x, t) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) F_i \cos \delta_i - A(x) \cos D(x) \right\} \cos \omega t -$$

$$- \left\{ \sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) F_i \sin \delta_i - A(x) \sin D(x) \right\} \sin \omega t$$

Мінімізуємо коефіцієнти при $\cos \omega t$ та $\sin \omega t$. Прийемо в якості критерію наближення середньоквадратичні функціонали

$$\begin{cases} I^c = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) a_i - A(x) \cos D(x) \right)^2 dx, \\ I^s = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) b_i - A(x) \sin D(x) \right)^2 dx, \end{cases} \quad (6)$$

де введено нові змінні: $a_i = F_i \cos \delta_i$, $b_i = F_i \sin \delta_i$.

Залежність функціоналів (6) від I підкреслює, що кількість сил, взагалі кажучи, також підлягає визначенню. Таким чином, задача зводиться до відшукання мінімумів функціоналів (6) у повному просторі змінних \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\xi}$, I , де $\vec{a}^T = \{a_i\}_{i=1}^I$, $\vec{b}^T = \{b_i\}_{i=1}^I$. Очевидно, що задача є не тільки неопуклого а й негладкою. Якщо знайдено оптимальний розв'язок, прогин знаходиться за формулою

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) (a_i \cos \omega t - b_i \sin \omega t), \quad (7)$$

а оптимальні сили та їх фази – за формулами

$$F_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \delta_i = \arctg(b_i/a_i). \quad (8)$$

Функція Гріна в силу лінійності може бути легко знайдена у вигляді суперпозиції фундаментального та однорідного розв'язків:

$$G(x; \xi; k) = A^\pm \operatorname{ch} kx + B^\pm \operatorname{sh} kx +$$

$$+ C^\pm \cos kx + D^\pm \sin kx, \quad x > \xi.$$

Задовольняючи умови неперервності прогину, кута нахилу, згинального моменту і стрибка перерізуючої сили, а також граничні умови, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь восьмого порядку, розв'язавши яку матимемо

$$G(x; \xi; k) = \begin{cases} g(x; \xi; k), & x \leq \xi, \\ g(\xi; x; k), & x > \xi, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$g(x; \xi; k) = \frac{\sin kx \operatorname{sinc}(1-x) - \operatorname{sh} k\xi \operatorname{sh} k(1-\xi)}{\operatorname{sinc} k} - \frac{\operatorname{sh} k\xi \operatorname{sh} k(1-\xi)}{\operatorname{sh} k}. \quad (10)$$

Очевидно, також, що $G(x; \xi; k) = G(\xi; x; k)$, що суттєво спрощує подальше розв'язання.

Аналітичне розв'язання

Очевидно, що аналітична мінімізація (6) неможлива, проте задача допускає часткове обернення, яке можливе в силу квадратичної залежності функціоналів від \vec{a} та \vec{b} . Дійсно, необхідна умова існування екстремуму по \vec{a} та \vec{b} : $\partial I^c / \partial a_j = 0$, $j = \overline{1, I}$, має вигляд систем рівнянь

$$\sum_{i=1}^I \int_0^1 G(x; \xi_j; k) G(x; \xi_i; k) dx a_i = \int_0^1 G(x; \xi_j; k) A(x) \cos D(x) dx,$$

$$\sum_{i=1}^I \int_0^1 G(x; \xi_j; k) G(x; \xi_i; k) dx b_i = \int_0^1 G(x; \xi_j; k) A(x) \sin D(x) dx,$$

$$j = \overline{1, I}. \quad (11)$$

Ввівши позначення

$$K = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^I, \quad K_{ij}(k) = \int_0^1 G(x; \xi_j; k) G(x; \xi_i; k) dx,$$

$$\vec{f}^{cT} = \{f_i^c\}_{i=1}^I, \quad f_i^c(k) = \int_0^1 G(x; \xi_i; k) A(x) \cos D(x) dx,$$

$$\vec{f}^{sT} = \{f_i^s\}_{i=1}^I, \quad f_i^s(k) = \int_0^1 G(x; \xi_i; k) A(x) \sin D(x) dx, \quad (12)$$

формальний розв'язок системи (11) має вигляд

$$\vec{a}(\vec{\xi}; k) = K^{-1} \vec{f}^c, \quad \vec{b}(\vec{\xi}; k) = K^{-1} \vec{f}^s. \quad (13)$$

Назвемо вирази (13) частковим оберненням, оскільки вони дозволяють зменшити розмірність задачі на $2I$. Зауважимо, що матриця K вироджується при виконанні умови: $\xi_{r1} = \xi_{r2} [= \xi_{r3} = \dots = \xi_{rI}]$. Проте в даному випадку це не має принципового значення, оскільки в запропонованому методі можливо встановити відношення: $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r, r \leq I$.

При обчисленнях обернень погано обумовлених матриць ($\xi_{r1} \approx \xi_{r2} [\approx \xi_{r3} \approx \dots \approx \xi_{rI}]$) можна скористатись процедурою псевдообернення. Для функції Гріна даної модельної задачі, вирази в (13) можна отримати в аналітичному вигляді, що дозволяє, принаймні для невеликих значень I , записати аналітичні вирази і для коефіцієнтів K^{-1} . В силу громіздкості вони не наводяться, однак, їх наявність суттєво спрощує аналітичні обчислення.

Використання часткового обернення (13) дозволяє переформулювати задачу мінімізації (6) в редукованому просторі:

$$I^f(\vec{\xi}; k; I) \downarrow_{\vec{\xi}, I} \min, \quad (14)$$

де

$$I^f(\vec{\xi}; k; I) = \lambda \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) a_i(\vec{\xi}) - A(x) \cos D(x) \right)^2 dx +$$

$$+(1-\lambda) \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) b_i(\bar{\xi}) - A(x) \sin D(x) \right)^2 dx. \quad (15)$$

Враховуючи, що

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^I G(x; \xi_i; k) a_i(\bar{\xi}) - A(x) \cos D(x) \right)^2 dx = \bar{a}^T K \bar{a} - 2 \bar{f}^c \bar{a}^T + C,$$

де $C = \int_0^1 A^2(x) \cos^2 D(x) dx$ (та аналогічний вираз для другого інтегралу у зваженій комбінації $S = \int_0^1 A^2(x) \sin^2 D(x) dx$), а також рівності $\bar{a}^T K \bar{a} = \bar{f}^c \bar{a}^T$, $\bar{b}^T K \bar{a} = \bar{f}^c \bar{b}$, (14) приводиться до вигляду

$$I^f(\bar{\xi}; k; I) = \lambda C + (1-\lambda) S - \lambda \bar{f}^{cT}(\bar{\xi}; k) K^{-1}(\bar{\xi}; k) \times \bar{f}^c(\bar{\xi}; k) - (1-\lambda) \bar{f}^{sT}(\bar{\xi}; k) K^{-1}(\bar{\xi}; k) \bar{f}^s(\bar{\xi}; k). \quad (16)$$

Таким чином, задача зведена до мінімізації зваженої комбінації квадратичних форм (15). Однак, параметр мінімізації входить в коефіцієнти як матриці, так і вектора форм складним нелінійним чином. Окрім того, розмірність форм (I) також є оптимізаційним параметром. В якості розв'язання задачі (14) (див. також (15)) пропонується наступна напіваналітична процедура. Послідовно, починаючи з однієї сили збільшуємо кількість сил до I , відшукуємо розв'язок (14). Вибираємо в якості оптимального розв'язок $\arg \min I^f(\bar{\xi}; k; I)$ для найменшого значення I^f . Потім, використовуючи (13), відновлюємо оптимальні значення \bar{a} та \bar{b} для оптимальної кількості сил і оптимального їх розташування. Використовуючи (8), відшукуємо значення сил та їх фази. Наприкінці перевіряємо отриманий розв'язок.

Дискретне формулювання еквівалентної задачі

Дискретна постановка задачі відрізняється від аналітичної (14). Дійсно, в аналітичній постановці відшукується умовний мінімум функціоналу за неперервною векторною змінною при заданій кількості сил. У дискретній постановці, покриймо область рішення (відрізок $[0, 1]$) рівномірної сіткою $\Omega = \{x_n = nh, n = \overline{0, N}, h = 1/N\}$, в кожній точці якої помістимо силу. Дискретний функціонал, аналогічний (15) при використанні квадратурної формули трапеції з урахуванням того, що $G(0; \xi; k) = G(1; \xi; k) = 0$, має вигляд

$$I^f(k; N) = \lambda C + (1-\lambda) S - \lambda \bar{f}^{cT}(k) \bar{a}^c(k) - (1-\lambda) \bar{f}^{sT}(k) \bar{a}^s(k), \quad (17)$$

де $\bar{a}^c(k)$ та $\bar{a}^s(k)$ – розв'язки лінійних систем

$$K(k) \bar{a}^c(k) = \bar{f}^c(k), \quad K(k) \bar{a}^s(k) = \bar{f}^s(k). \quad (18)$$

В позначеннях

$$K = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad K_{ij}(k) = h \sum_{n=1}^{N-1} G_n(k) G_m(k), \quad G_n(k) = G(x_n; \xi; k),$$

$$\bar{f}^{cT} = \{f_i^c\}_{i=1}^{N-1}, \quad f_i^c(k) = h \sum_{n=1}^{N-1} G_n(k) A_n \cos D_n,$$

$$A_n = A(x_n), \quad D_n = D(x_n),$$

$$\bar{f}^{sT} = \{f_i^s\}_{i=1}^{N-1}, \quad f_i^s(k) = h \sum_{n=1}^{N-1} G_n(k) A_n \sin D_n. \quad (19)$$

Задача (17) – (19) не є оптимізаційною. Вона дає можливість лише визначити характеристики сил, розташованих в заданих вузлах сітки (шляхом розв'язання систем (18)) і оцінити функціонал (17) шляхом обчислення.

Поставимо оптимізаційну дискретну задачу, еквівалентну аналітичній наступним чином. Маючи (17), (18), визначити $I_1 = \{i_1, \dots, i_n\}$ ($I_0 = \{j \in \{j_1, \dots, j_{N-1-n}\} : I_0 \cup I_1 = \overline{1, N-1}\}$, $n \leq I$) – набір точок сітки Ω потужності, що не перевищує I , такий, що при прикладанні в цих точках сил з оптимальними характеристиками, (17) приймає мінімальне значення.

Відповідно, I_0 – набір індексів вузлів, в яких сили не прикладаються. При цьому, очевидно, системи рівнянь (18) повинні мати порядок $(n \times n)$ та їх матриці й вектори правих частин отримуються з повних виразів (18) шляхом відкидання рядків і стовпчиків з індексами з I_0 . В результаті розв'язання оптимізаційної задачі визначимо оптимальний набір I_1 (індекси точок сітки прикладання сил, його потужність – оптимальна кількість сил), а $\bar{a}^c(k)$ і $\bar{a}^s(k)$ – оптимальні характеристики прикладених сил. Реалізація цього підходу має вигляд

$$I^f(k; N) = \lambda C + (1-\lambda) S - \lambda \bar{f}^{cT}(k) \bar{a}^c(k) - (1-\lambda) \bar{f}^{sT}(k) \bar{a}^s(k) \downarrow_{I_1, \bar{a}^c, \bar{a}^s} \min,$$

$$\begin{cases} -A(\bar{1} - \bar{r}) \leq K(k) \bar{a}^c(k) - \bar{f}^c(k) \leq A(\bar{1} - \bar{r}), \\ -A(\bar{1} - \bar{r}) \leq K(k) \bar{a}^s(k) - \bar{f}^s(k) \leq A(\bar{1} - \bar{r}), \\ -B\bar{r} \leq \bar{a}^c(k) \leq B\bar{r}, \quad -B\bar{r} \leq \bar{a}^s(k) \leq B\bar{r}, \\ \sum_{i=1}^{N-1} r_i \leq I, \quad \bar{r} = \{r_i\}_{i=1}^{N-1}, \quad r_i = \begin{cases} 1, & i \in I_1, \\ 0, & i \in I_0. \end{cases} \end{cases}$$

Висновки

У роботі розглянута модельна задача про визначення оптимальної кількості сил та їх характеристик – місця прикладання, амплітуд і фаз, які забезпечують із заданою точністю найкращим чином наближення заданих форми і поточної фази

коливань балки в заданому частотному діапазоні. У першій частині роботи задача зведена до умовної багатоекстремальної задачі мінімізації основного функціоналу, яка не піддається аналітичному розв'язанню. У другій частині роботи, побудований її дискретний еквівалент, що формулюється у вигляді змішаної умовної задачі неопуклої мінімізації. Дискретна задача розв'язана чисельно з використанням багатofункціонального пакета PSG (Matlab Interface), наданого American Optimal Decision, USA [7, 8]. Використання функціональних можливостей пакету дозволило отримати і проаналізувати оптимальний розв'язок задачі. Показано, що найкращим розподілом точок прикладання сил у широкому частотному діапазоні є близьке до рівномірного розподілу. Управління фазою коливань утруднено у вузьких діапазонах, що утримують резонансні частоти. Збільшення кількості прикладених сил призводить до експоненціального зменшення середньоквадратичної помилки (на рис. 1 приведено залежність мінімуму функціонала (17) від кількості прикладених сил у логарифмічному масштабі), а розширення частотного діапазону – до її експоненціального зростання, що може бути основою оптимального конструювання випромінюючих елементів (на рис. 2 приведено залежність мінімуму функціонала (17) від частоти збурення). На рис. 3 та на рис. 4 приведено оптимальні наближення амплітуди та фази при $I = 2$ та $I = 10$.

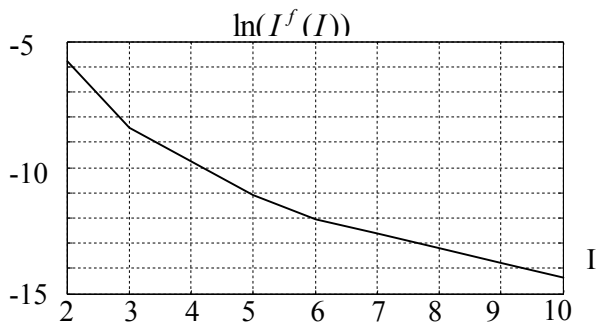


Рис. 1. Залежність похибки від кількості сил

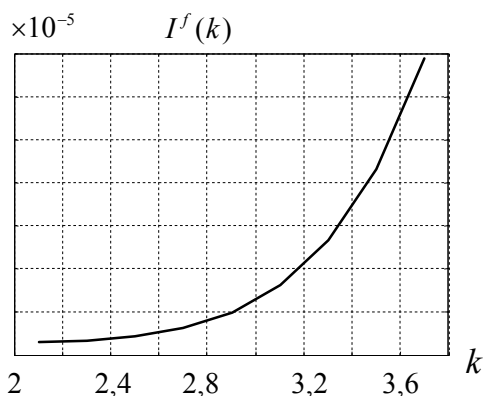


Рис. 2. Залежність похибки від частоти

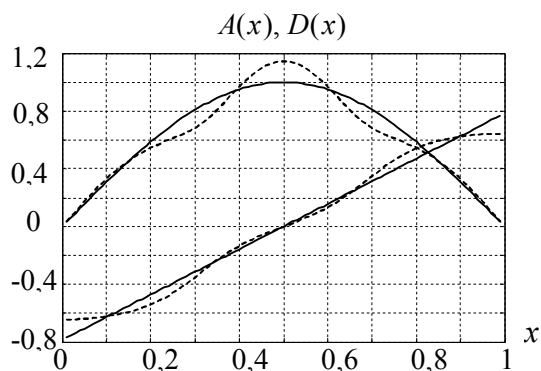


Рис. 3. Наближення амплітуди та фази при $I = 2$

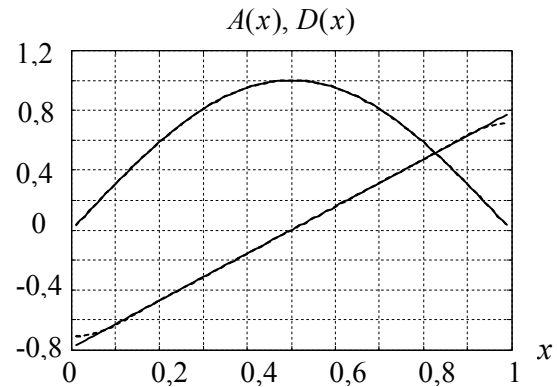


Рис. 4. Наближення амплітуди та фази при $I = 10$

Список використаних джерел

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N. Control of vibration. – Moscow: Nauka, 1980. – 384 p. (in Russian).
2. Akulenko L. D. The design of the vibrational motion control systems with discrete and distributed parameters // Applied Mathematics and Mechanics. – 1989. – V. 3, is. 4. – P. 43-49. (in Russian).
3. Balandin D. V. On the optimal vibration absorption of elastic objects // Applied Mathematics and Mechanics. – 1995. – V. 59, is. 3. – P. 73-75. (in Russian).
4. Komkov V. Optimal control theory for the damping of vibrations of simple elastic systems. – Springer Verlag. Berlin. Heidelberg, New York, 1972. – 253 p.
5. Banichuk N. V. Introduction to Optimization of Structures. – Springer-Verlag, NY, 1990. – 312 p.
6. Banichuk N. V., Klimov D. M. Dynamical Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures. – Springer-Verlag, NY, 1991. – 257 p.
7. American Optimal Decisions Portfolio Safeguard (PSG) in Windows Shell Environment: Basic Principles. – AORDA, 2011. – С. 260. – ISBN 098282131X, 270 p.
8. American Optimal Decisions Optimization and Risk Management Case Studies with Portfolio Safeguard (PSG) in Windows Shell Environment. – AORDA, 2010. – С. 528. – ISBN 0982821301, 310 p.

Надійшла до редколегії 10.05.13