

УДК 539.3

Карнаухов В. Г.<sup>1</sup>, д. ф.-м. н., проф.

### Термомеханіка зв'язаних полів в непружних матеріалах та елементах конструкцій при гармонічному навантаженні

*Розглядаються основні питання термомеханіки зв'язаних полів в тілах з пасивних і п'єзоактивних непружних матеріалів при гармонічному навантаженні: рівняння стану, постановка зв'язаних задач, методи їх розв'язування, вплив зв'язаності на термомеханічну поведінку непружних тіл.*

*Ключові слова: непружність, коливання, розігрів.*

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3  
e-mail: karn@inmech.kitv.ua

#### Вступ

Механіка зв'язаних полів вивчає взаємодію механічних, електромагнітних та теплових полів у деформованих тілах. В останні роки ця галузь привертає увагу механіків всього світу через її велике практичне значення. Суттєвий внесок в її розвиток вніс академік А. Д. Коваленко та його учні. Уже в ранніх роботах А. Д. Коваленка, коли він працював на кафедрі теорії пружності Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка, були розглянуті лінійні зв'язані задачі термомеханіки для тонкостінних елементів [1]. Основи лінійної електропружності, яка враховує взаємодію механічних та електричних полів в елементах конструкцій з п'єзоматеріалів, закладено в фундаментальних роботах А. Ф. Улітка, який довгий час очолював кафедру теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка. Перші роботи по термомеханіці зв'язаних полів в елементах конструкцій при гармонічному навантаженні було виконано в роботах А. Д. Коваленка та автора цієї статті [2-9]. В подальшому дослідження коливань і дисипативного розігріву елементів конструкцій знайшли суттєвий розвиток в роботах співробітників Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ [10-18].

V. G. Karnaukhov<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

### Thermomechanics of the coupled fields in nonelastic materials and structural elements under harmonic loading

*The main problems of thermomechanics of the coupled fields for the inelastic passive and piezoactive solids under harmonic loading are considered. Among them are formulation of constitutive equations, coupled problem statements, methods of their solutions, influence of coupling on thermomechanical behavior of inelastic solids.*

*Key Words: nonelasticity, vibrations, heating.*

<sup>1</sup> Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Science of Ukraine,  
Nesterov Str., 3, Kyiv 03057, Ukraine  
e-mail: term@inmech.kiev.ua

В даній статті подано короткий нарис тих основних питань, які виникають при математичному моделюванні вимушених коливань і дисипативного розігріву елементів конструкцій з непружних матеріалів при дії на них гармонічного за часом механічного чи електричного навантаження.

#### Постановка зв'язаних нелінійних задач термомеханіки непружних просторових тіл при гармонічному навантаженні

Для моделювання термомеханічних процесів в тілах з пасивних і п'єзоактивних матеріалів можна використовувати загальні моделі в'язкопружності, пластичності або в'язкопружнопластичності. Проте, застосування таких моделей для гармонічного навантаження потребує великого об'єму експериментально-теоретичних досліджень для визначення параметрів, функцій або функціоналів, які входять у рівняння стану. До того ж розв'язання нелінійних крайових задач, які описують вказані процеси, вимагає застосування ітераційних методів і багато часу при їх реалізації. Тому виникає потреба у спрощенні визначальних рівнянь з урахуванням специфіки гармонічних процесів, яка полягає в тому, що при наявності в'язкості при періодичному електромеханічному

навантаженні з деякою частотою, в тілі через короткий час встановлюється періодичний процес з цією ж частотою. Ця специфіка дозволяє суттєво спростити визначальні рівняння і дати спрощену постановку зв'язаних задач. Це питання для активних і пасивних матеріалів детально обговорюється в монографії [18]. Застосовуючи до загальних рівнянь стану методи нелінійної механіки, прийдемо до визначальних рівнянь, які мають такий самий вигляд, як і рівняння стану теорії пружності з тією лише різницею, що вони є комплексними, а параметри цих визначальних рівнянь залежать від амплітуд незалежних польових величин. Рівняння енергії приймає вигляд класичного рівняння теплопровідності з джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією. Суттєво спрощується і визначальне рівняння для останньої. Вона дорівнює осередненій за період потужності. Таким чином, постановка зв'язаних задач електротермомеханіки для гармонічних процесів зводиться до розв'язання універсальних комплексних рівнянь руху, кінематичних співвідношень, комплексних рівнянь електростатики, рівняння енергії. Граничні умови співпадають з граничними умовами для пружного матеріалу.

Якщо всі електричні величини покласти рівними нулеві, приходимо до більш простої задачі термомеханіки для тіл з пасивних матеріалів. Використовуючи вказані вище універсальні рівняння та визначальні рівняння, одержимо в загальному випадку складну нелінійну комплексну систему диференціальних рівнянь відносно комплексних компонент вектора зміщень, комплексного потенціалу та дійсної температури. Аналіз цієї системи показує, що можливі різні варіанти постановки зв'язаних задач термомеханіки елементів конструкцій з пасивних (без п'єзоефекту) та активних (з п'єзоефектом) матеріалів. Найпростіша постановка задачі має місце в тому випадку, коли електромеханічні характеристики не залежать від температури та інших польових величин. Тоді цей перший клас задач зводиться до розв'язання лінійної задачі електромеханіки чи механіки, розрахунку дисипативної функції і розв'язання задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Якщо електромеханічні характеристики залежать від температури, маємо більш складний другий клас нелінійних задач. Їх нелінійність обумовлена залежністю дисипативної

функції від температури та деформацій і залежністю електромеханічних характеристик від температури. Третій клас задач виникає при врахуванні залежності електромеханічних характеристик від незалежних польових величин, скажемо, від деформацій для задач термомеханіки для тіл з пасивних непружних матеріалів. Цей клас задач зводиться до розв'язання нелінійної задачі електромеханіки (чи механіки), розрахунку дисипативної функції і розв'язання лінійного рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла. Найбільш складний четвертий клас задач виникає при врахуванні залежності електромеханічних характеристик від температури і незалежних польових величин, скажемо, деформацій для випадку тіла з пасивного матеріалу.

### **Постановка зв'язаних задач термомеханіки непружних тонкостінних елементів при гармонічному навантаженні**

Тонкостінні елементи широко застосовуються в усіх галузях сучасної техніки. Тому дослідженню різних питань механіки й термомеханіки пластин й оболонок присвячено дуже багато робіт вчених різних країн. Часто ці елементи виготовляються з полімерних матеріалів чи композитів на їх основі, які мають суттєві гістрезисні втрати. Тому при дослідженні вимушених коливань виникають поставлені вище питання про вплив температури дисипативного розігріву на термомеханічний стан тонкостінних елементів з пасивних та п'єзоактивних матеріалів. Такі питання було вперше поставлено в роботах [3, 6-8]. Для математичної постановки задач про коливання і дисипативний розігрів тонкостінних елементів можна використовувати гіпотези різного рівня. Найпростіші з них – це гіпотези Кірхгофа – Лява. Для п'єзоактивних матеріалів вони повинні бути доповнені гіпотезами відносно електричних польових величин. До того ж потрібно приймати гіпотези відносно температури. Ці питання детально обговорено в монографіях [3, 11-14, 17], де наведено нелінійні комплексні диференціальні рівняння відносно компонент зміщень та температури дисипативного розігріву.

При використанні гіпотез типу Тимошенка вважається, що нормальна складова індукції значно більша її тангенціальних складових. З цієї

умови визначаються тангенціальні складові напруженості електричного поля через її нормальну складову. Відносно температури приймаються додаткові гіпотези. Кінематичні співвідношення залишаються класичними. В результаті можна одержати спрощені визначальні рівняння, а з їх використанням і нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно комплексних компонент зміщень, кутів зсуву і коефіцієнтів розкладу теплового потоку і температури. При врахуванні геометричної нелінійності додатково використовуються нелінійні кінематичні співвідношення. Основні рівняння уточнених зв'язаних теорій тонкостінних елементів представлено в [12, 14].

### Методи розв'язування зв'язаних задач термомеханіки

Задачі першого з вказаних вище класів є, по суті, лінійними, бо вони зводяться до розв'язання лінійних задач електромеханіки чи механіки; до розрахунку дисипативної функції, яка є алгебраїчною функцією польових величин; до розв'язання лінійної задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією. Єдиним ускладненням є те, що задача електромеханіки чи механіки для непружних матеріалів є комплексною.

Для розв'язання вказаних вище нелінійних зв'язаних задач термомеханіки застосовуються різного роду ітераційні процеси: метод послідовних наближень, метод квазілінеаризації, узагальнений метод пружних розв'язків, метод покрокового інтегрування за часом та ін. За допомогою цих ітераційних процедур вихідні нелінійні задачі зводяться до розв'язання послідовності лінійних задач термомеханіки чи електротермомеханіки з залежними від координат комплексними коефіцієнтами, розрахунку дисипативної функції та розв'язання лінійних задач теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування вказаних лінійних задач застосовуються чисельні методи – метод скінченних елементів, метод дискретної ортогоналізації, метод скінченних різниць тощо. Детальний огляд методів розв'язування зв'язаних задач подано в [10-14, 16-18].

При дослідженні резонансних коливань і викликаного ними дисипативного розігріву в деяких випадках вдається одержати аналітичні роз-

в'язки задач. Для цього використовується метод Бубнова – Гальоркіна, коли задається форма коливань, розраховується дисипативна функція і тим самим методом розв'язується нелінійне рівняння теплопровідності. В результаті вихідна нелінійна задача зводиться до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для амплітуди коливань та температури дисипативного розігріву.

Подальше спрощення розв'язку задач можна одержати при дослідженні коливань і дисипативного розігріву непружних тіл в квазістатичній постановці [13].

### Вплив зв'язаності полів на термоелектромеханічну поведінку тіл з непружних матеріалів

Температура дисипативного розігріву може вплинути на всі сторони механічного та електро-механічного стану непружних тіл: на розподіл напружень та деформацій; на амплітудно-температурно-частотні характеристики коливань та на залежність коефіцієнта демпфування від частоти; на статичну та динамічну стійкість тонкостінних елементів, зокрема, на області динамічної стійкості; на ефективність роботи сенсорів та актуаторів і на ефективність активного демпфування коливань за їх допомогою. При досягненні температурою деяких критичних точок, наприклад, точок деградації матеріалу, зокрема, точки плавлення для пасивних матеріалів чи точки Кюрі для активних матеріалів елементи конструкцій втрачають свою функціональну здатність, так що має місце специфічний тип теплового руйнування, коли конструкція не розділяється на частини, але перестає виконувати свою функціональну здатність. Розрахувавши температуру дисипативного розігріву для різних значень механічного навантаження, можна знайти критичні значення амплітуд механічного навантаження. При амплітуді навантаження, яка перевищує критичне значення, можна розрахувати критичний час, при досягненні якого має місце вказаний вище тип теплового руйнування. Розрахувавши критичний час для різних закритичних значень амплітуди навантажень, побудуємо криву типа Велера, яка асимптотично наближається зверху до критичного значення механічного навантаження і яка дає інформацію про довговічність елемента.

### Список використаних джерел

1. *Kovalenko A. D.* Thermoelasticity of the plates and shells. – Kiev, KSU. – 1971. – 108 p.
2. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On influence of cyclic loading on temperature of cylinder with viscoelastic materials // Reports of NAS of USSR. – 1966. – N 9. – P. 1135-1140. (in Ukrainian).
3. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* The equations and solutions of some problems of the theory of viscoelastic shells // The thermal stress in constructional elements. – 1967. – N 7. – P. 1-24. (in Russian).
4. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of viscoelastic bodies with material with resonant dispersion // Reports of NAS of USSR. – 1968. – N 11. – P. 1029-1034. (in Ukrainian).
5. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of viscoelastic bodies under periodical loading // Applied Mechanics. – 1969. – V. 5, N 2. – P. 28-35. (in Russian).
6. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of orthotropic viscoelastic cylindrical shells under transversal vibrations // The thermal stress in constructional elements. – 1970. – N 10. – P. 234-238. (in Russian).
7. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On heating of viscoelastic revolution' shells under periodical loading // The thermal stress in constructional elements. – 1971. – N 11. – P. 5-18. (in Russian).
8. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* On main features of behavior of the viscoelastic orthotropic shells with generalized thermoreological simple materials // The thermal stress in constructional elements. – 1972. – N 12. – P. 5-18. (in Russian).
9. *Kovalenko A. D., Karnaukhov V. G.* The methods a solutions of coupled problems of thermoviscoelasticity. – The strength of materials and constructions. – Kiev: Nauk. Dumka, 1974. – P. 176-189. (in Russian).
10. *Karnaukhov V. G.* Coupled problems of thermoviscoelasticity. – Kiev: Nauk. dumka, 1982. – 260 p.
11. *Karnaukhov V. G., Senchenkov I. K., Gumeniuk B. P.* Thermomechanical behavior of viscoelastic bodies under harmonic loading. – Kiev: Nauk. dumka, 1985. – 288 p.
12. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F.* Coupled problems of theory of viscoelastic plates and shells. – Kiev: Nauk. dumka, 1986. – 224 p.
13. *Poturaev V. N., Dyrda V. I., Karnaukhov V. G. and etc.* Thermomechanics elastomeric construction' elements under cyclic loading. – Kiev: Nauk. dumka, 1987. – 288 p.
14. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F.* Electrothermoviscoelasticity. – Kiev: Nauk. dumka, 1988. – 320 p. (Mechanics of coupled fields in construction' elements: in 5 volumes, vol. 4).
15. *Karnaukhov V. G., Gumeniuk B. P.* Thermomechanics of prestrain viscoelastic bodies. – Kiev: Nauk. dumka, 1990. – 304 p.
16. *Guz' A. N., Shul'ga N. A., ..., Karnaukhov V. G. and etc.* Tecnological stresses in materials. – Kiev: «A.S.K.», 1997. – 396 p. – (Mechanics of composites: in 12 volumes, vol. 6).
17. *Kubenko V.D., ..., Karnaukhov V.G and etc.* Dynamics of construction' elements. – Kiev: «A.S.K.», 1999. – 379 p. – (Mechanics of composites: in 12 volumes, vol. 9).
18. *Karnaukhov V. G., Mychailenko V. V.* Non-linear thermomechanics of piezoelectric non-elastic bodies under monohsrmonic loading. – Zytomyr: ZSFTU, 2005. – 428 p.

Надійшла до редколегії 14.05.13