

УДК 539.3

Кирилова О. І.¹, асистент

Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з жорсткими включеннями при коливаннях повздожнього зсуву

Розв'язана задача по визначенню напруженого стану поблизу тонких жорстких включень в нескінченному циліндрі довільного перерізу при коливаннях повздожнього зсуву. Запропоновано підхід, що дозволяє окремо задовольнити умови на включеннях та на границі циліндра. Отримано наближені формули для обчислення КІН та досліджено вплив на їх значення частоти коливань, а також геометрії циліндра та розташування включень.

Ключові слова: циліндр довільного перерізу, гармонічні коливання, система включень, коефіцієнти інтенсивності напружень.

¹ Одеська національна морська академія, 65029, м. Одеса, вул. Дидрихсона, 8
e-mail: ol007ga@yandex.ru

Проблеми визначення динамічного напруженого стану поблизу тонких дефектів в необмежених тілах можна вважати достатньо вивченими. Як можна бачити з робіт [1-3], це стосується як двовимірних, так і просторових задач теорії пружності. Однак аналогічні задачі для тіл скінченних розмірів досліджені значно менше. Це пов'язано з тим, що використання прямих чисельних методів (різницевих і скінченних елементів) ускладнюється необхідністю згущення дискретизації в околі дефекту. Одним з перспективних методів для розв'язування таких задач є метод граничних елементів. Але при його застосуванні вихідна крайова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь і на поверхні дефекту, і на границі тіла, що істотно ускладнює чисельну реалізацію. У даній роботі розглянуто підхід, що дозволяє окремо задовольнити умови на поверхнях включень і на границі тіла. Запропонований метод ґрунтується на використанні розривних розв'язків рівняння Гельмгольца.

Постановка задачі

Розглянемо пружний циліндр з твірними, паралельними осі Oz (рис. 1), перетин якого пло-

O. I. Kirillova¹, Assistant

Stressed state in an infinite cylinder of arbitrary cross-section with rigid inclusions under oscillations of longitudinal shear

The problem of determining the stress state near the thin rigid inclusions in an infinite cylinder of arbitrary cross-section under oscillations of longitudinal shear. We propose an approach to satisfy the conditions separately on the surface of inclusions and on the boundary of the cylinder. The approximate formulas for calculating stress intensity factors are obtained to investigate the influence of frequency oscillations, geometry of the cylinder and location of the inclusions on their values.

Key Words: cylinder of arbitrary cross-section, harmonic oscillations, stress intensity factors, the system of inclusions.

¹ Odessa national maritime academy, 65029, Odessa, 8, Didrikhsona str.
e-mail: ol007ga@yandex.ru

щиною xOy є довільна замкнена гладка крива, яка в полярній системі координат визначається рівнянням $r = r_0\psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

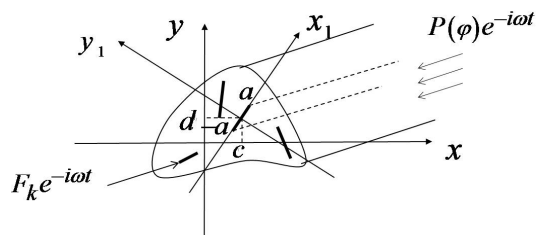


Рис. 1. Циліндр довільного перерізу з системою жорстких включень

У циліндрі містяться N наскрізних тонких жорстких включень у вигляді пластин малої товщини h , які займають відрізки довжиною $2a_l$ з центрами в точках (c_l, d_l) , $l = 1, 2, \dots, N$. У циліндрі відбуваються коливання повздожнього зсуву, які можуть бути викликані або дією на бічну поверхню зсувного гармонічного навантаження $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, або в результаті дії на включен-

ня зсувних сил $F_k e^{-i\omega t}$. В останньому випадку границя циліндра вважається нерухомою. За таких умов відмінною від нуля буде тільки z -компонента вектора переміщення, яка задовольняє рівняння Гельмгольца [4]. У полярній системі координат це рівняння має вигляд

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

де $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$, $c_2^2 = G \rho_1^{-1}$, G і ρ_1 – модуль зсуву і густина матриці, ω – частота коливань. Множник $e^{-i\omega t}$ в (1) і всюди далі опущений і розглядаються тільки амплітудні значення.

Рівняння (1) розглядається з двома типами граничних умов. У разі завантаженої границі

$$\tau_{rz}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Якщо ж границя нерухома, виконується умова

$$w(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3)$$

Для формулювання граничних умов на включеннях з кожним з них пов'язується локальна система координат $x_k O_k y_k$. Нехай $w_k(x_k, y_k)$ – z -компонента вектора переміщення при переході від полярних координат до декартових $x_k O_k y_k$. Вважається, що між тілом і включенням здійснені умови повного зчеплення

$$w_k(x_k, \pm 0) = d_k, \quad |x_k| < a_k. \quad (4)$$

На поверхнях включень дотичні напруження є розривними зі стрибком

$$\langle \tau_{zyk}^k \rangle = G(\tau_{zyk}(x_k, +0) - \tau_{zyk}(x_k, -0)) = \chi_k(x_k). \quad (5)$$

У рівності (4) d_k – амплітуда поздовжніх коливань включення, яка визначається з рівняння руху включення як жорсткого тіла. При гармонічних коливаннях це рівняння має вигляд

$$-m_k d_k \omega^2 = F_k + \int_{-a_k}^{a_k} \chi_k(\eta) d\eta, \quad m_k = 2a_k h_k \rho_k, \quad (6)$$

де ρ_k – густина включення. Рівняння (6) записано для випадку, коли до включень прикладено сили і виконано умову (3). У разі завантаженої границі циліндра (2) в рівнянні (6) покладається $F_k = 0$.

За сформульованих умов ставиться задача визначити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для кожного із включень.

Розв'язання задачі

У локальній системі координат для кожного включення будуватиметься розривний розв'язок [5] рівняння Гельмгольца зі стрибками, визначеними в (5):

$$w_l^{(d)}(x_l, y_l) = \int_{-a_l}^{a_l} \frac{\chi_l(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (7)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right),$$

де $H_0^{(1)}$ – функція Ганкеля.

Далі в системі $O r \varphi$ переміщення подаються у вигляді

$$w^{(g)}(r, \varphi) = w_0^{(g)}(r, \varphi) + \sum_{l=1}^N w_l^{(g)}(r, \varphi). \quad (8)$$

У (8) $w_l^{(g)}(r, \varphi)$ – розривні розв'язки (5) після переходу до полярних координат, а $w_0^{(g)}(r, \varphi)$ – такий розв'язок рівняння Гельмгольца (1), що для (8) виконуються граничні умови (2) або (3). Ця невідома функція подається у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків рівняння (1):

$$w_0^{(g)}(r, \varphi) = r_0 \sum_{s=1}^M A_s g_s(r, \varphi), \quad (9)$$

де

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi,$$

$$g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi.$$

Функції $g_s(r, \varphi)$, $s = 1, \dots, M, \dots$, лінійно незалежні і утворюють повну замкнену систему функцій [6].

Для реалізації граничних умов на включеннях (4) переміщення в локальній системі координат аналогічно (8) запишуться у вигляді

$$w_k(x_k, y_k) = w_k^0(x_k, y_k) + \sum_{l=1}^N w^{kl}(x_k, y_k). \quad (10)$$

Підставляючи (10) в (4), отримаємо систему інтегральних рівнянь, яка після введення позначень

$$\kappa_0 = \kappa_2 r_0, \quad \gamma_k = a_k r_0^{-1}, \quad \eta_k = a_k \tau, \quad x_k = a_k \zeta, \quad (11)$$

$$c_k^0 = c_k r_0^{-1}, \quad d_k^0 = d_k r_0^{-1}, \quad G q_l(\tau) = \chi_l(a_l \tau)$$

і виділення сингулярних складових ядер набуде вигляду

$$\frac{\gamma_k}{2\pi} \int_{-1}^1 q_k(\tau) \left(\ln|\tau - \zeta| + Q_l^{(k)}(\tau - \zeta) \right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1, l \neq k}^N \int_{-1}^1 q_l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta) d\tau + r_0 \sum_{s=1}^M A_s g_s(a_k \zeta, 0) = d_k^0, \quad (12)$$

де $Q_1^{(k)}(z) = O(1)$, $z \rightarrow 0$, а $F^{kl}(\tau, \zeta)$ – нескінченно диференційована функція при $-1 \leq \tau, \zeta < 1$. До (12) необхідно додати рівність, яке випливає з (6) при переході до нових позначень (11):

$$d_k^0 = -\frac{1}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k} \left(F_k^0 + \int_{-1}^1 q_k(\tau) d\tau \right), \quad (13)$$

де $\bar{\rho}_k = \rho_k \rho_1^{-1}$, $\varepsilon_k = h_k a_k^{-1}$, $F_k^0 = F_k(Ga_k)^{-1}$. У випадку, коли навантаження прикладено до границі, в (13) вважається, що $F_k^0 = 0$.

Розв'язок системи (12) шукаємо у вигляді

$$q_k(\tau) = \sum_{s=1}^M A_s \varphi_s^k(\tau) + \varphi_0^k(\tau). \quad (14)$$

Тоді кожний доданок із (14) має задовольняти інтегральні рівняння (12):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_s^k(\tau) \left(\gamma_k \ln|\tau - \zeta| + \gamma_k Q_1^{(k)}(\tau - \zeta) + \frac{\pi}{\varepsilon_k \gamma_k \bar{\rho}_k \kappa_0^2} \right) d\tau + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta) d\tau = -f_{s,k}(\zeta), \quad (15)$$

$$f_{0,k} = \frac{F_0}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k}, \quad f_{s,k} = g_s(a_k \zeta, 0),$$

$$s = 0, \dots, M; \quad k = 1, \dots, N.$$

Для знаходження розв'язків отриманих рівнянь невідомі функції подаються у вигляді $\varphi_s^k(\tau) = \psi_s^k(\zeta) / \sqrt{1 - \tau^2}$, $k = 1, 2, \dots, N$. Функції $\psi_s^k(\tau)$ наближаються інтерполяційним многочленом

$$\psi_s^k(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{sm}^k \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)},$$

де $T_n(\tau)$ – многочлен Чебишева, τ_m – його корені, $\psi_{sm}^k = \psi_s^k(\tau_m)$.

Після застосування методу механічних квадратур отримано систему алгебричних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^k \left(\gamma_k B_{jm} + \gamma_k Q_1^{(k)}(\tau_m - \zeta_j) + \frac{\pi}{\varepsilon_k \gamma_k \bar{\rho}_k \kappa_0^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l F_{jm}^{kl} = -f_{s,k}(\zeta), \quad (16)$$

де $F_{jm}^{kl} = F^{kl}(\tau_m, \zeta_j)$, $s = 0, \dots, M$; $k = 1, \dots, N$. У (16) для обчислення інтеграла з логарифмічною особливістю використана квадратурна формула [7]; B_{jm} – коефіцієнти цієї формули.

Для визначення коефіцієнтів A_k скористаємось умовами (2) або (3) на границі. Задовольняючи граничну умову (2), отримуємо рівність

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) V_l(\tau, \varphi) d\tau + B_s(\varphi) \right) = P(\varphi), \quad (17)$$

де

$$V_l(\tau, \varphi) = -\frac{1}{4} i \gamma_l \kappa_0 R_{0l}^{-1} H_1^{(1)}(\kappa_0 R_{0l}) \times \\ \times \left[((\gamma_l \tau - x_{0l}) \cos \alpha_l + y_{0l} \sin \alpha_l) \cos(\bar{n}, x) + \right. \\ \left. - (y_{0l} \cos \alpha_l - (\gamma_l \tau - x_{0l}) \sin \alpha_l) \cos(\bar{n}, y) \right], \\ B_s(\varphi) = f_s^{(x)} \cos(\bar{n}, x) + f_s^{(y)} \cos(\bar{n}, y); \\ f_s^{(u)} = r_0 \partial g_s / \partial u|_{r=r_0 \psi(\varphi)}.$$

У випадку нерухомої границі аналогічна рівність набуває вигляду

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) U_l(\tau, \varphi) d\tau + g_s(r_0 \psi(\varphi), \varphi) \right) = \\ = -\sum_{l=1}^N \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_0^l(\tau) U_l(\tau, \varphi) d\tau, \quad (18)$$

де $U_l(\tau, \varphi) = -(i/4) H_0^{(1)}(\kappa_0 \sqrt{(\gamma_l \tau - x_{0l})^2 + y_{0l}^2})$.

Квадратурні формули Гауса – Чебишева та використання колокаційного метода у вузлах $\sigma_b = 2\pi b/M$, $b = 1, \dots, M$ дають можливість замінити (17) та (18) системами лінійних рівнянь з невідомими A_s , $s = 1, \dots, M$:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l V_l(\tau_m, \sigma_b) + B_s(\sigma_b) \right) = P(\sigma_b), \quad (19) \\ \sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \gamma_l \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l U_l(\tau_m, \sigma_b) + g_s(r_0 \psi(\sigma_b), \sigma_b) \right) = \\ = -\sum_{l=1}^N \gamma_l \sum_{m=1}^n a_m \psi_{0m}^l U_l(\tau_m, \sigma_b). \quad (20)$$

Як відомо, концентрація напруження в тілі навколо тонких жорстких включень характеризується КІН [8]:

$$\begin{bmatrix} \tau_{\varphi_1} \\ \tau_{\varphi_1} \end{bmatrix} = -\frac{K^\pm}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} + O(1), \quad r > 0.$$

Після розв'язування систем (19) або (20) та (16) наближені значення КІН знаходяться за формулами

$$k_l^\pm = \frac{K_l^\pm}{G_1 \sqrt{2a_l}} = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{s=1}^M A_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^l \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1} \mp \\ \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_m^* \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1}.$$

Результати числових досліджень

Для числової реалізації запропонованого методу розглядався еліптичний циліндр з чотирма включеннями (рис. 2).

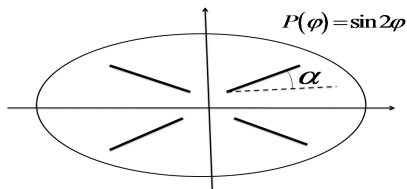


Рис. 2. Переріз еліптичного циліндра з чотирма включеннями

Вважалось, що ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = 0,5$, а нахил включень до великої півосі характеризує кут α (рис. 2). На поверхню циліндра діє самоврівноважене навантаження $P(\varphi) = \sin 2\varphi$. При таких умовах $|k_i^\pm| = |k^\pm|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Обчислювались значення КІН для включення, розташованого в першій чверті. Змінювався параметр $\gamma = a/r_0$ – відношення довжин включень до великої осі еліпса. Для даного еліпса при $\alpha = 30^\circ$ та $\gamma \approx 0,488$ має місце вихід включення на поверхню циліндра.

Результати обчислень наведені на рис. 3-4 у вигляді графіків залежності безрозмірних КІН від безрозмірної частоти $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\gamma = 0,2; 0,4; 0,485$. Числові результати показують, що в усіх випадках $|k^-| > |k^+|$. Значення параметра γ суттєво впливає

Список використаних джерел

1. Jain D. L. Kanval R. P. Diffraction of elastic waves by two complanar parallel rigid strips//Int. J. Solids and Struct. – 1972. – V. 10, № 11. – P. 925-937.
2. Jun Jei, Qingheny Yung, Yue-Sheng Wang and Chuangzeng Thung. An investigation of dynamic interaction between multiple cracks and inclusions by TDBEM // Composites Science and Technology, June 2009. –V. 69, Iss. 7-8. – P. 1275-1285.
3. Popov V. G. Diffraction of elastic shear waves on radially distributed rigidinclusions // International Applied Mechanics. – 1996. – V. 32, № 8. – P. 624-630.
4. Poruchikov V. B. Metods of dynamical theory of elasticity. – Moscow: Nauka, 1986. – 328 p. (in Russian).

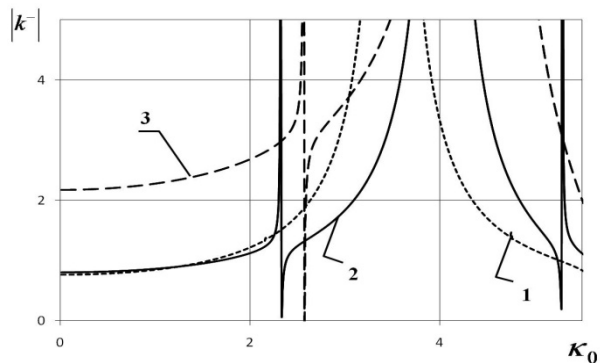


Рис. 3. Значення КІН для кінця включення, віддаленого від границі

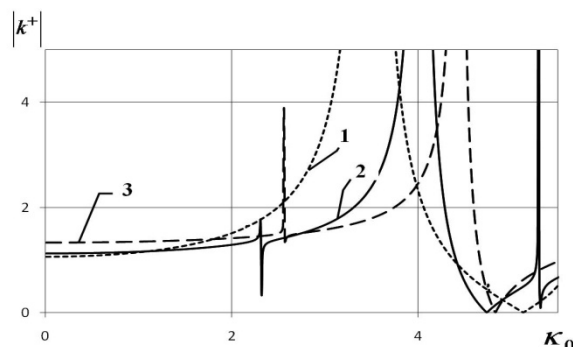


Рис. 4. Значення КІН для кінця включення, наближеного до границі

на значення частоти першого резонансу. Вона зростає при збільшенні γ , що геометрично означає збільшення довжини включення і наближення одного кінця до границі. Також при цьому спостерігається і зростання абсолютних значень КІН при частотах, менших частоти першого резонансу.

5. Popov V. G. Comparison of displacement and stress fields in the diffraction of elastic shear waves on various defects: crack and thin rigid inclusion // Dynamic systems. – 1993. – V. 12. – P. 14-23. (in Russian).
6. Vekua N. P. Systems of singular integral equations and some boundary problems. – Moscow: Nauka, 1970. – 379 p. (in Russian).
7. Nazarchuk Z. T. Numerical investigation of waves diffraction on cylindrical structures. – Kiev: Nauk. dumka, 1989. – 256 p. (in Russian).
8. Sulym G. T. Fundamentals of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions. – Lviv, 2007. – 716 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 25.03.13