УДК 539.595

Константінов О. В.[1], к. ф.-м. н.

Узагальнена задача Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності пружного амортизатора

Досліджується узагальнення класичної задачі Фарадея щодо розвитку параметричного резонансу в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Дослідження проведено для випадку, коли в систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею» внесено додаткову ступінь вільності – можливість поступального руху резервуару в горизонтальній площині за наявності пружного амортизатора. Показано, що наявність та характеристики пружного амортизатора суттєво впливають на якісну картину розвитку параметричного резонансу в системі.

Ключові слова: параметричний резонанс, задача Фарадея, додатковий ступінь вільності, вільна поверхня рідини, зони нестійкості, пружний амортизатор.

[1] Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

O. V. Konstantinov [1], PhD (Phys.-Math.)

The Faraday generalized problem for the mechanical system «cylindrical tank – liquid with a free surface» with the elastic shock absorber

The generalized Faraday problem about attainment on parametric resonance in the mechanical system «cylindrical reservoir – liquid with a free surface» is under consideration. Behaviour of the system is considered in the case, when supplementary degree of freedom is implemented into the system, namely, potential of translational movement of the reservoir in the horizontal plane with the elastic shock absorber under system disturbance by vertical translational movement, which changes in time according to harmonic law. It is shown that the presence and characteristics of elastic shock absorber significantly affect the qualitative picture of the parametric resonance in the system.

Key words: parametric resonance, Faraday problem, an additional degree of freedom, free surface of liquid, the area of instability, elastic shock absorber.

[1] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
01601, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

Вступ

Параметричний резонанс в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» вперше експериментально досліджував М. Фарадей в 1831 році. Циліндричний резервуар, частково заповнений водою, був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні і мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоті збурення резервуару. Оскільки резервуар рухається тільки вертикально за заданим законом, коливання рідини ніяк не впливають на характер його руху.

Узагальнення задачі Фарадея проводилося в таких напрямках. По-перше, в системі передбачається додатковий ступінь вільності: можливості поступального руху резервуару в горизонтальній площині за рахунок антисиметричних коливань вільної поверхні рідини, по-друге, до резервуару кріпиться пружний амортизатор, який забезпечує наявність зворотної сили. Подальший аналіз показав, що одним із головних факторів, які впливають на характер динамічних процесів в системі, стає жорсткість пружного амортизатора.

Дискретна модель механічної системи

Розглянемо задачу про коливання механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності пружного амортизатора. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, який може рухатись поступально у вертикальній площині під дією параметричного збурення $\varepsilon_z = H_z \cos pt$ та у горизонтальній площині за рахунок коливань вільної поверхні рідини та пружного амортизатора. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух – безвихровим.

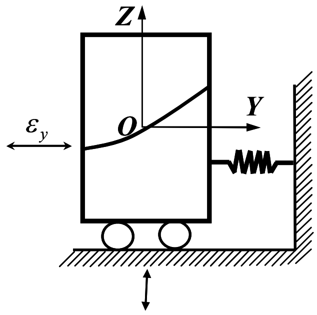

Рис. 1. Механічна модель системи

На основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, методу модальної декомпозиції та методу [2], який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини, отримаємо дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розвинення в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщення центру незбуреної вільної поверхні рідини

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} +$$
$$+\ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijkr}^q - 2\delta_{rijk}^q) -$$
$$-\frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \right.$$
$$\left. +2\sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + 3\sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k (\vec{B}_{ijkr}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\}, \quad (1)$$

$$\rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[B_i^{1y} + \sum_j a_j B_{ij}^{2y} + \sum_{j,k} a_j a_k B_{ijk}^{3y} \right] \right\} + (M_F + M_T) \ddot{\varepsilon}_y =$$
$$= -c\varepsilon_y - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + 2\sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right\}, \quad (2)$$

де ρ – густина рідини, g – прискорення гравітаційних сил, M_F та M_T – маси рідини та резервуару відповідно, c – коефіцієнт жорсткості пружного амортизатора.

Система рівнянь (1), (2) містить N+3 рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) і описує динаміку сумісного руху системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності параметричного збурення. Рівняння (1) описують динаміку коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку квазітвердого поступального руху резервуару, однак ці рівняння взаємозалежні і містять сили взаємодії між резервуаром та рідиною.

Власні частоти механічної системи

Визначимо власні частоти механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності пружного закріплення. Для визначення власних частот відповідно до теорії механічних коливань [1] запишемо рівняння (1), (2) тільки для амплітуди a_1 першої антисиметричної форми ψ_1 з можливістю горизонтального руху резервуару по координаті ε_y у вигляді

$$\beta_{11}^q \ddot{a}_1 + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0,$$
$$\frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \frac{c}{M_T + M_F} \varepsilon_y = 0,$$

і з урахуванням позначень

$$a = a_1, \quad \lambda_F = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}, \quad \lambda_T = \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F},$$
$$\omega_F^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}, \quad \omega_T^2 = \frac{c}{M_T + M_F}$$

представимо далі цю систему в канонічному вигляді

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\varepsilon}_y + \omega_F^2 a = 0, \quad (3)$$
$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\varepsilon}_y + \omega_T^2 \varepsilon_y = 0, \quad (4)$$

де ω_F та ω_T – парціальні частоти вільної поверхні рідини та резервуару з пружним амортизатором відповідно. Будемо шукати періодичні розв'язки системи рівнянь (3), (4) у вигляді

$$a = A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t, \quad \varepsilon_y = A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

і, застосовуючи до системи рівнянь (3), (4) метод Бубнова – Гальоркіна, запишемо рівняння для амплітуд A_1 і A_2 у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_F^2 & \lambda_F \omega^2 \\ \lambda_T \omega^2 & \omega^2 - \omega_T^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Записана система рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю. Прирівнюючи цей визначник до нуля, розв'яжемо рівняння четвертого ступеня

$$(1-\lambda_T\lambda_F)\omega^4-(\omega_T^2+\omega_F^2)\omega^2+\omega_F^2\omega_T^2=0$$

та отримаємо формулу для визначення власних частот механічної системи

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\frac{\omega_T^2+\omega_F^2\pm\sqrt{(\omega_T^2-\omega_F^2)^2+4\omega_T^2\omega_F^2\lambda_T\lambda_F}}{2(\lambda_T\lambda_F-1)}}\,.$$

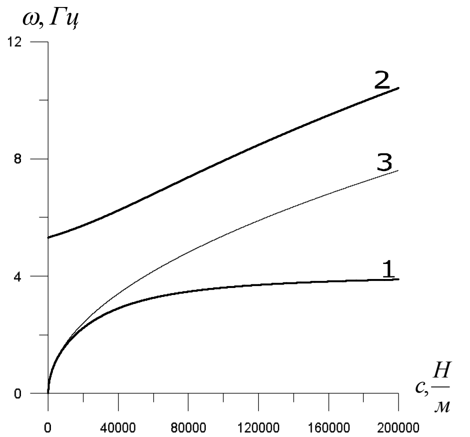

Рис. 2. Залежність власних частот (1, 2) механічної системи та парціальної частоти резервуару з пружним амортизатором (3) від жорсткості пружини

Обчислимо власні частоти для резервуару радіусу R = 1 м та маси M_T, який частково заповнений водою маси M_F до глибини H = R. Маси резервуару та рідини пов'язані співвідношенням M_T = = 0,1M_F. Для системи з такими характеристиками парціальна частота рідини $\omega_F=4{,}144$ Гц та завжди є постійною величиною (оскільки витікання рідини з резервуару відсутнє), а парціальна частота резервуару з пружним амортизатором збільшується при збільшенні жорсткості пружини (рис. 2, крива 3) та має мінімальне значення $\omega_T^{\min}=0$ Гц при нульовій жорсткості (за відсутності амортизатора). Як видно з графіку, перша власна частота асимптотично прямує до парціальної частоти рідини ω_F (рис. 2, крива 1), а друга власна частота нескінченно зростає (рис. 2, крива 2).

Зони нестійкості та характер розвитку параметричного резонансу

Рівняння (1), (2) описують процес розвитку параметричних коливань в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z=H_z\cos pt$. Як відомо із теорії параметричних коливань [1], існують області в площині параметрів (p,H_z), коли розв'язки рівнянь (3) або (4), (5) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів зовнішнього силового збурення резервуару (p,H_z) система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Відомо з теорії нелінійних коливань [1], що дослідження нестійкості ведеться на основі лінеаризованих рівнянь руху і практично для всіх випадків руху в околі першого (нижчого) резонансу. Тому для побудови зон нестійкості скористаємось системою рівнянь (3), (4), доповнивши її параметричним вертикальним збуренням резервуару $\varepsilon_z=H_z\cos pt$, тобто отримаємо систему

$$\ddot a+\lambda_F\ddot\varepsilon_y+\omega_F^2(1-\nu H_z p^2\cos pt)a=0\,, \tag{5}$$

$$\lambda_T\ddot a+\ddot\varepsilon_y+\omega_T^2\varepsilon_y=0\,, \tag{6}$$

де

$$\nu=\frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}\,.$$

Області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості [1]. Звідси випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, за яких диференціальні рівняння (5), (6) мають періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Отже, зони нестійкості для першого резонансу обмежені періодичними розв'язками з частотою $p/2$, тому періодичні рішення системи рівнянь (5), (6) представимо у вигляді

$$a=A_1\cos\frac{pt}{2}+B_1\sin\frac{pt}{2},\ \ \varepsilon_y=A_2\cos\frac{pt}{2}+B_2\sin\frac{pt}{2},$$

та з використанням методу Бубнова – Гальоркіна отримаємо рівняння границь зон нестійкості

$$p_1=\sqrt{\frac{2}{\lambda_T\lambda_F-1-2\nu H_z\omega_F^2}}\Big(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)+$$

$$+\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1-2\nu H_z\omega_T^2)^2+2\omega_T^2\omega_F^2(2\lambda_T\lambda_F-1+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2},$$

$$p_2=\sqrt{\frac{2}{1+2\nu H_z\omega_F^2-\lambda_T\lambda_F}}\Big(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)-$$

$$-\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1-2\nu H_z\omega_T^2)^2+2\omega_T^2\omega_F^2(2\lambda_T\lambda_F-1+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2},$$

$$p_3=\sqrt{\frac{2}{-1+2\nu H_z\omega_F^2+\lambda_T\lambda_F}}\Big(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)-$$

$$-\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1+2\nu H_z\omega_T^2)^2-2\omega_T^2\omega_F^2(1-2\lambda_T\lambda_F+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2},$$

$$p_4=\sqrt{\frac{2}{-1+2\nu H_z\omega_F^2+\lambda_T\lambda_F}}\Big(-\omega_T^2-\omega_F^2(1+2\nu H_z\omega_T^2)+$$

$$+\sqrt{\omega_T^4+\omega_F^4(1+2\nu H_z\omega_T^2)^2-2\omega_T^2\omega_F^2(1-2\lambda_T\lambda_F+2\nu H_z\omega_T^2)}\Big)^{1/2}.$$

На рис. 3 та рис. 4 показані зони нестійкості відносно першої та другої власної частоти системи при різних значеннях коефіцієнту жорсткості

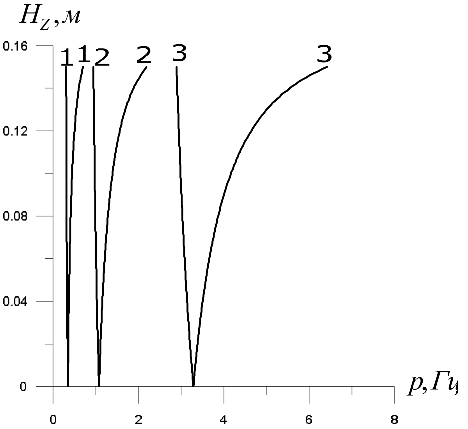

Рис. 3. Зони нестійкості відносно першої власної частоти механічної системи

пружного амортизатора (1 – 100 Н/м , 2 – 1000 Н/м , 3 – 10000 Н/м). Як видно з графіків, збільшення жорсткості амортизатора на порядок суттєво змінює розташування зон нестійкості відносно першої власної частоти та практично не впливає на розташування зон нестійкості відносно другої власної частоти. Оскільки власні частоти системи при збільшенні жорсткості амортизатора збільшуються, зони нестійкості теж зміщуються в бік збільшення зовнішньої частоти параметричного збудження.

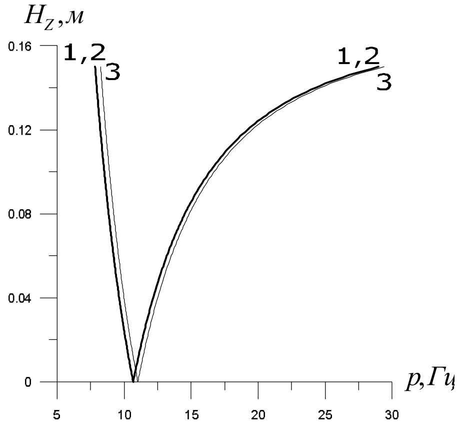

Рис. 4. Зони нестійкості відносно другої власної частоти механічної системи

Висновки

Для механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» проведено дослідження умов виходу на параметричний резонанс у випадку, коли в систему внесено додаткову ступінь вільності – можливість поступального руху резервуару в горизонтальній площині за наявності пружного амортизатора. Показано, що наявність та параметри пружного амортизатора суттєво впливають на розташування зон нестійкості, а, значить, і на якісну картину розвитку параметричного резонансу в системі.

Список використаних джерел

1. *Bolotin V. V.* Dynamic stability of elastic systems. – M:GITTL, 1956. – 600 p. (in Russian).
2. *Limarchenko O. S., Yasinsky V. V.* Nonlinear dynamics of constructions with liquid. – Kiev: Kiev Polytechnic Inst., 1997. – 338 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 20.05.13