УДК 519.9

Краснопольська Т. С.[1], д. ф.-м. н., с. н. с.,
Приходько Д. Ф.[2], аспірант,
Гуржій О. А.[3], д. ф.-м. н., с. н. с.

Нелінійні моделі коливань консольного стрижня з малою жорсткістю на згин

В статті побудовано дві моделі коливань консольного пружного стрижня з малою жорсткістю на згин. Одна модель враховує геометричну нелінійність, а друга – фізичну нелінійність.

Ключові слова: пружна система, згинна жорсткість, нелінійна модель.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України,
03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com
[3] Національний технічний університет України "КПІ", 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37
e-mail: a.gourjii@gmail.com

T. S. Krasnopolskaya[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.
D. F. Prihodko[2], PhD student,
A. A. Gourjii[3], Dr. Sci. (Phys.-Math.), sen. res.

Nonlinear models of vibrations of cantilever bar with low bending rigidity

Two models of oscillations of a cantilever bar with low bending rigidity are constructed. One model takes in to account a geometrical nonlinearity, while the second model uses physical nonlinear properties.

Key Words: cantilever bar, bending rigidity, nonlinearity.

[1] Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabov st., 8/4,
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4 e
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com
[3] National Technical university of Ukraine “KPI”,
03056, Kyiv, Peremoga av., 37
e-mail: a.gourjii@gmail.com

Дана робота присвячена розробці нелінійних моделей згинних коливань консольного стрижня, з настільки малою жорсткістю на згин, що – є “закритичним” [1, 2]. Насамперед, розглядається модель коливань стрижня з урахуванням геометричної нелінійності. Потім виводяться рівняння коливань з урахуванням фізичної нелінійності.

Нелінійна модель згинних коливань стрижня при врахуванні геометричної нелінійності

На рис. 1 показано схему однорідного пружного стрижня постійного поперечного перетину з консольним закріпленням. В недеформованому стані вісь стрижня співпадає з віссю x прямокутної системи координат xOy, початок координат знаходиться в закріпленні стрижня (рис. 1, а: початкове положення). При відсутності зовнішнього впливу, окрім рівномірно розподіленої сили ваги, гнучкий прямолінійний стрижень може втратити стійкість і його вісь викривляється (рис. 1, а), якщо $mgL > 7{,}839\, EI/L^2$ (L – довжина стрижня, m – лінійна вага, EI – жорсткість на згин, g – прискорення вільного падіння, h – діаметр поперечного перетину). Такий стрижень буде називатись “закритичним” [2, 5].

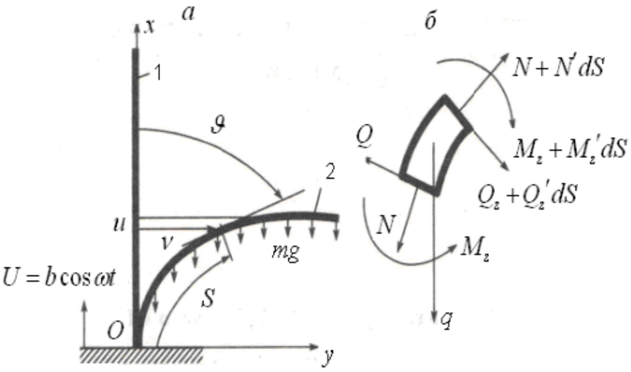

Рис. 1

Якщо надати основі стрижня вертикальні коливання $U(t) = b\cos\omega t$, то за рахунок збудження параметричних коливань можна стабілізувати прямолінійне (вертикальне) положення вісі шляхом підбору частоти ω та амплітуди b вібрацій. Рух стрижня буде описуватись в рухомій системі координат xOy, початок якої жорстко зв’язаний з закріпленням стрижня (рис. 1, а). Враховуємо скінченні повороти його перетинів.

Припускаємо що поперечні перетини стрижня залишаються плоскими та перпендикулярними до здеформованої осі, а нормальні напруження на ділянках паралельних осі дуже малі порівняно з повздовжніми напруженнями, вісь стрижня залишається нерозтяжною (гіпотеза Кіргофа).

Положення осі стрижня $\mathbf{r}(t, s)$ можна подати в параметричній формі $\mathbf{r}(t, s) = x(t, s)\mathbf{i} + y(t, s)\mathbf{j}$, де t – час; s – натуральна координата осі стрижня, відлік від точки закріплення (рис. 1, а); $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – одиничні орти осей координат. Умова нерозтяжності вісі стрижня записується у вигляді [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t, s)}{\partial s} = \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1. \tag{1}$$

У подальшому похідну за дуговою координатою будемо позначати штрихом ($\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$). У нездеформованому стані вісь стрижня ($\mathbf{r}^0(t, s) = x^0(t, s)\mathbf{i}$) співпадає з вертикальною віссю x. Виходячи з (1), отримаємо: $\mathbf{r}^0(t, s) = s\mathbf{i}$, $s \in [0, L]$, де L – довжина стрижня. Вектор переміщення $\mathbf{R}(t, s) = \mathbf{r}(t, s) - \mathbf{r}^0(t, s) = -u(t, s)\mathbf{i} + \upsilon(t, s)\mathbf{j}$, де компоненти вектора переміщень

$$u(t, s) = s - x(t, s), \quad \upsilon(t, s) = y(t, s). \tag{2}$$

Додатним напрямком u є переміщення в протилежному напрямку до осі x. З визначення кута повороту навколо осі стрижня ϑ (рис. 1, а) випливає, що $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}\cos\vartheta + \mathbf{j}\sin\vartheta$, де $\cos\vartheta = x'$, $\sin\vartheta = y'$. Прийнявши до уваги (2), вираз для кривини $\kappa = \vartheta'$ осі стрижня у здеформованому стані в функції від прогину υ набуває вигляду [2]

$$\kappa = \upsilon''\left(1 - \upsilon'^2\right)^{-1/2} \approx \upsilon''\left(1 + \upsilon'^2/2\right). \tag{3}$$

Осьове переміщення u можна виразити через поперечне переміщення υ:

$$u' = 1 - \sqrt{1 - \sin^2\vartheta} \approx \frac{1}{2}\upsilon'^2. \tag{4}$$

Вирази (3) та (4) описують геометричні нелінійності даної моделі. Доданками третього порядку малості й вище при розкладах в ряди нехтуємо.

Розглянемо дану систему за відсутності тертя. Для стрижня Бернуллі – Ейлера згинний момент M_z виражається через кривину зігнутої осі κ наступним чином: $M_z(t, s) = EI\kappa(t, s)$. Звідси, враховуючи (3), маємо

$$M_z = EI\upsilon''\left(1 + \upsilon'''^2/2\right). \tag{5}$$

Нехтуючи інерцією кручення поперечних перетинів, з рівності для моментів у диференціальному вигляді $M_z' + Q = 0$ з урахуванням (5) отримаємо вираз для повздовжньої сили:

$$Q = -EI\left[\upsilon''\left(1 + \upsilon'^2/2\right)\right]' = -EI\left(\upsilon''' + \upsilon'^2\upsilon'''/2 + \upsilon'\upsilon''^2\right). \tag{6}$$

Так як розглядаємо рух стрижня в рухомій системі координат, зв'язаній з основою стрижня, то до масових сил необхідно додати інерційну складову від переносного руху вздовж осі x. Тоді сумарне розподілене зовнішнє осьове навантаження (додатний напрямок проти осі x) є

$$q_x(t) = m(g + \ddot{U}) = m(g - b\omega^2\cos\omega t).$$

Рівняння поступального руху диференціального елемента стрижня (рис.1, б) (деформований стан в проекціях на осі x та y) має вигляд

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(N\cos\vartheta\right)' + \left(Q\sin\vartheta\right)' + q_x(t), \\ m\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = \left(N\sin\vartheta\right)' + \left(Q\cos\vartheta\right)'. \end{cases} \tag{7}$$

Перше рівняння системи (7) дозволяє знайти нормальну силу N. Враховуючи, що верхній кінець стрижня вільний від зовнішніх навантажень (тобто при $x = L$: $N = 0$, $Q = 0$), та нехтуючи доданками третього порядку малості, отримуємо вираз для нормальної сили

$$\begin{aligned} N = m\int_s^L d\tilde{s}\,\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{s}} \frac{\partial^2\upsilon'^2}{\partial t^2}\,d\hat{s} - EI\upsilon'''\upsilon' - \\ - q_x'(t)(L - s)\left(1 + \upsilon'^2/2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Із другого рівняння системи (7) з урахуванням (8), зберігаючи члени не вище третього порядку малості, отримаємо

$$\begin{aligned} & m\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} + EI\upsilon^{IV} + q_x(t)\left[(L - s)\upsilon'\right]' = \\ & = m\left[\upsilon'\int_s^L d\tilde{s}\,\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{s}} \frac{\partial^2\upsilon'^2}{\partial t^2}\,d\hat{s}\right] - \\ & - EI\left[\upsilon'\left(\upsilon''\upsilon'\right)'\right]' - q_x'(t)\left[\left(L - S\right)\upsilon'^3/2\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Рівняння (9) описує нелінійні поперечні коливання вертикально розташованого консольного стрижня з нерозтяжною віссю на вібруючій основі в полі сил тяжіння.

Крайові умови мають вигляд $s=0$: $\upsilon=0$ $\vartheta=0$; $s=L$: $M_z=0$, $Q=0$, або з урахуванням (5) та (6):

$$\begin{cases} s=0: & \upsilon=0, \quad \upsilon'=0; \\ s=L: & \upsilon''=0, \quad \upsilon'''=0. \end{cases} \qquad (10)$$

Для подальшого аналізу перетворимо рівняння (10) до безрозмірного вигляду, використовуючи такі заміни:

$$\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \zeta=\frac{s}{L}, \quad \xi=\frac{\upsilon}{h}, \quad \beta=\frac{b}{L},$$
$$\Omega=\omega L^2\sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad \varepsilon=\left(\frac{h}{L}\right)^2, \quad \gamma=\frac{mgL^3}{EI}. \qquad (11)$$

Тоді рівняння (9) запишеться так:

$$\ddot{\xi}+\xi^{IV}+p(\tau)\left[(1-\zeta)\xi'\right]'=\varepsilon\left\{\xi'\int_{\zeta}^{1}d\zeta_1\int_{0}^{\zeta_1}\left(\xi'^2+\ddot{\xi}'\right)d\zeta_2-\right.$$
$$\left.-\xi'\left(\xi''\xi'\right)'-p(\tau)(1-\zeta)\xi'^3/2\right\}', \qquad (12)$$

де $p(\tau)=\gamma-\beta\Omega^2\cos\Omega\tau$. Точками позначаємо диференціювання за безрозмірним часом τ, штрихами – за безрозмірною осьовою координатою ζ.

Відповідно, крайові умови (10) приймуть вигляд

$$\zeta=0: \ \xi=0, \ \xi'=0; \quad \zeta=1: \ \xi''=0, \ \xi'''=0.$$

Розв'язок отриманого нелінійного рівняння (12) будується методом Гальоркіна у вигляді

$$\xi(\zeta,\tau)\approx\sum_{i=1}^{n}q_i(\tau)\varphi_i(\zeta), \qquad (13)$$

де $q_i(\tau)$ – амплітудна функція, $\varphi_i(\zeta)$ – координатна, неперервна і чотири рази диференційована функція, що задовольняє крайові умови.

Після підстановки (13) у рівняння (12) і подальшій ортогоналізації нев'язки з координатними функціями на інтервалі $\xi\in[0,1]$, отримуємо систему n звичайних диференціальних рівнянь для амплітудних функцій $q_i(\tau)$.

В якості координатних функцій використовуються форми поперечних коливань стрижня. Розв'язок задачі про власні поперечні коливання консольного стрижня має представлення не за допомогою функцій Крилова [5], а за допомогою функцій, що задовольняють [4] рівняння

$$\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial\zeta^4}+\gamma\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\zeta}\right]-\gamma\lambda_n\varphi_i=0. \qquad (14)$$

Якщо параметр гнучкості $\gamma>7{,}839$, то вертикальний стрижень, знаходячись під дією сили тяжіння, втрачає стійкість, і початкова прямолінійна форма його осі викривляється. Вертикальна форма осі стрижня може бути стабілізована за рахунок вібрації основи в вертикальному напрямі (D. Acheson, T. Mullin і співавтори, А. М. Гуськов і Г. Я Пановко). В наших чисельних розрахунках ми використовували значення параметра $1/\gamma=$ $=0{,}055$, обраховане для сталевої проволоки, один сантиметр якої важить 0,12 г.

Згині коливання стрижня при нелінійному законі пружності

Досліджуємо коливання, які можуть виникнути при згині осі стрижня в площині (x,y), причому використаємо нелінійну технічну теорію згину [3]. У цій теорії пружна поведінка стрижня характеризується нелінійним співвідношенням $\sigma_x=f(\varepsilon_x)$, що встановлює зв'язок між повздовжніми напруженнями σ_x і повздовжніми видовженнями ε_x на основі випробувань матеріалу на розтяг – стиск. Крім того приймемо, що $f(\varepsilon_x)$ має вигляд

$$f(\varepsilon_x)=E\left(1-\alpha_3E^2\varepsilon_x{}^2\right)\varepsilon_x, \qquad (15)$$

де E – модуль Юнга, K – модуль стиску, G – модуль зсуву,

$$E=\frac{9KG}{3K+G}; \ \alpha_3=-\frac{2}{9}\frac{3K}{3K+G}\frac{\gamma_2}{G^2};$$
$$\gamma_2=-g_2=-\frac{9}{2}G^2\left(1+\frac{G}{3K}\right).$$

Позначимо прогин точки x осі стрижня в напрямку y в момент часу t через $\eta(x,t)$, згинний момент в цій точці – через $M(x,t)$, площу поперечного перетину Q – через F і густину матеріалу стрижня через ρ. Тоді незалежно від вигляду закону пружності, основним рівнянням динаміки для елемента dx стрижня в момент часу t буде

$$\frac{\partial^2M}{\partial x^2}=-\rho F\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \qquad (16)$$

за умови, що можна не враховувати інерцію обертання елемента стрижня.

Згинний момент $M=\iint_Q f(Ay)ydydz$, де A – кривина осі стрижня. Замінивши A другою похідною $\partial^2\eta/\partial x^2$ і враховуючи рівність (15), отримаємо

$$M(x,t) = E\iint\limits_Q \left[1-\alpha_3 E^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 y^2\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} y^2 dydz\,, \quad (17)$$

де інтегрування проводиться по всьому поперечному перетину Q стрижня. Враховуючи осьовий момент інерції площі $J_0 = \iint_Q y^2 dydz$ і другу постійну $J_2 = \iint_Q y^4 dydz$ приведемо $M(x,t)$ до вигляду

$$M(x,t) = EJ_0\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha_3 E^2\frac{J_2}{J_0}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^3\right]. \quad (18)$$

Підставивши цей вираз у рівняння (16), отримаємо для $\eta(x,t)$ нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\rho F\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + EJ_0\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} - 3\alpha_3 E^3 J_2 \times$$
$$\times\left[\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)^2\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0. \quad (19)$$

Якщо в перетинах стрижня діє повздовжня сила $N(x)$, і замість жорсткого закріплення стрижень здійснює вертикальні коливання вигляду $a\cos\omega t$, то повздовжня сила в перетині x дорівнює

$$N(x) = \rho F\left\{g\left(l-x\right) + \left(l-x\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a\cos\omega t\right)\right\}. \quad (20)$$

Рівняння нелінійних згинних коливань стрижня записується в формі

$$EJ_0\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + \rho Fg\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\left(l-x\right) + \left(l-x\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{g}\cos\omega t\right)\right]\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) -$$
$$-3\alpha_3 E^3 J_2\left[\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)^2\right]\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \rho F\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0.$$
(21)

На основі врахування геометричної та фізичної нелінійностей побудовані дві моделі нелінійних згинних коливань консольного закритичного стрижня.

Список використаних джерел

1. *Champneys A. Fraser B.* The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis. – Proc. R. Soc. London, 2000. – P. 553-570.
2. *Guskov A. M., Panovko G. Ya.* Vibrational stabilization of the vertical axis of a flexible shaft // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2006. – № 5.
3. *Kauderer H.* Nichtlineare mechanic. – Berlin: Springer, 1958.
4. *Krasnopolskaya T. S., Prihodko D. F., Gourjii A. A.* Dynamic characteristics of a cantilever bar with low bending rigidity // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2012. – № 4. – P. 52-55. (in Ukrainian).
5. *Timoshenko S., Gere J.* Theory of elastic stability. – New York: McGRAW-HILL, 1961.

Надійшла до редколегії 15.03.13