УДК 539.3

Кундрат М. М.[1], д. т. н., проф.,
Мельник Ю. В.[1], аспірант

Контактна взаємодія півплощини з навантаженою по верхній границі пружною накладкою

Подано розв'язок двовимірної модельної задачі для півбезмежної пластини з пружною гнучкою накладкою, навантаженою по всій довжині зсувними напруженнями. Задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння, яке в класі функцій, необмежених на кінцях інтервалу, розв'язано методом колокацій. Обчислено розміри зон передруйнування, розподіли контактних напружень під накладкою, розривні осьові зусилля у накладці.

Ключові слова: півбезмежна пластина, накладка, зона передруйнування, контактні напруження, осьові зусилля.

[1] Національний університет водного господарства та природокористування,
33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: kundrat@i.ua, Melnytschka@ukr.net

M. M. Kundrat[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
Ju. V. Melnik[1], PhD student

Contact interaction a half-plane with elastic loaded along the upper border reinforcement

Solution of two-dimensional model problem for a semi-infinite plate with elastic flexible plate loaded along the whole length with a shifting tension are presented. The task is reduced to a singular integral equation that is solved by collocation method in class of functions unlimited at the ends of the interval. There are calculated dimensions of eventual zones of prefracture, distribution of contact tensions under the reinforcement and breaking axial forces in the reinforcement.

Key Words: semi-infinite plate, reinforcement, zone of prefracture, contact stresses, axial forces.

[1] National university of water management and natural resources using,
33028, Rivne city, Soborna st. 11,
e-mail: kundrat@i.ua, Melnytschka@ukr.net

Задачі розрахунку підкріплюючих елементів, як одного із засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій, інтенсивно розвиваються. Підкріплення є одночасно й потужними концентраторами напружень, які спричиняють нелінійні та пластичні деформації і в значній мірі ускладнюють розрахунок напружено-деформованого стану в композиції. Урахування явищ розпушення матеріалів та нелінійного їх деформування, що передують безпосередньо руйнуванню, дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

Задача для пластини з приєднаним по всій довжині безмежно довгим ребром вперше розв'язана в праці Е. Мелана [1] і в подальшому отримала назву від його імені. Дослідження та огляд контактної задачі Мелана для пружного тіла подано в монографіях М. І. Мусхелішвілі [2], А. І. Каландії [3], Е. І. Григолюка, В. М. Толкачова [4], Г. Я. Попова [5], В. М. Александрова, С. М. Мхітаряна [6], Г. Т. Сулима [7] та широкому колі праць. У використаних в них підходах розглядались ідеалізовані схеми математичної постановки задачі, які не враховували можливості виникнення в області країв накладки часто спостережуваних зон ослабленого контакту, що призводило до появи у розв'язках механічно некоректних сингулярностей напружень в околах кінців накладок. Розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану та граничної рівноваги в півплощині з нерозтягливою чи пружною накладкою запропонована в праці М. М. Кундрата [8]. Постановка задачі дала можливість уникнути сингулярності напружень в околах кінців накладки та отримати механічно коректні обмежені напруження у всіх точках композиції.

Розглянемо ізотропну півбезмежну пластину одиничної товщини підкріплену пружною гнучкою накладкою завдовжки $2a$, модуль пружності якої більший від такого ж для пластини ($E_f > E$). Накладка по верхній границі навантажена тангенціальними напруженнями інтенсивності $\tau_+(x)$ та зосередженою силою P на її правому кінці (рис. 1).

З аналізу пружного розв'язку відповідної задачі слідує, що найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців накладки, де на-

самперед слід чекати виникнення і розвитку локалізованих зон передруйнування. Вважаємо, що саме тут зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини вздовж межі з'єднання пластина – накладка, і складаються з двох частин: ділянок пластичного деформування та розпушення.

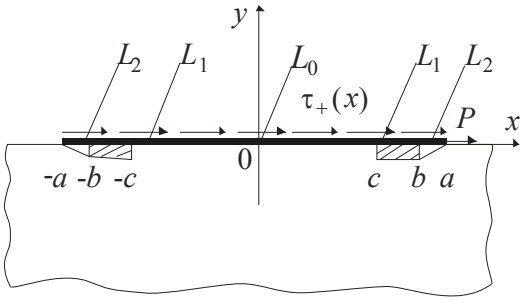

Рис 1. Напівнескінченна пластина підкріплена накладкою

На ділянках розпушення дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^*:

$$\tau_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a-|x|}{a-b} \quad (x \in L_2). \qquad (1)$$

На ділянках пластичного деформування дотичні напруження приймаємо сталими і рівними граничному значенню τ_s^* :

$$\tau_{xy}(x) = \tau_s^* \quad (x \in L_1). \qquad (2)$$

Параметр τ_s^* трактуємо як теоретичну або як технічну адгезійну зсувну міцність контактної межі пластина – накладка, а при пластичному деформуванні – як її зсувний поріг пластичності. При досягненні взаємними переміщеннями матеріалу контактної межі в таких зонах певної границі зв'язок між матеріалами може порушуватися, тобто накладка в її кінцевих областях відшарується від пластини.

Розглянемо рівновагу накладки: для довільного перерізу з координатою x рівняння рівноваги має [3] вигляд

$$\frac{\partial u^f(x)}{\partial x} = \frac{1}{hE_f}\left[\int_x^a \tau_+(t)dt - \int_x^a \tau_{xy}(t)dt + P\right]. \qquad (3)$$

Для навантаженої півплощини згідно праці [2] вираз для деформації вільного краю є наступний:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\kappa+1}{4G}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau_{xy}(t)}{t-x}dt\right], \; x \in (-a, a). \qquad (4)$$

Умова рівності деформацій між накладкою і пластиною (3), (4) з врахуванням формул (1), (2) породжує сингулярне інтегральне рівняння стосовно невідомих контактних напружень $\tau_{xy}(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\tau_{xy}(t)dt}{t-x} + \frac{1}{2h\lambda_0}\int_x^c \tau_{xy}(t)dt +$$
$$+\tau_s^*\left[\frac{a+b-2c}{4h\lambda_0} + \frac{1}{\pi}g(x)\right] + \qquad (5)$$
$$+\frac{1}{2h\lambda_0}\left[P - \int_x^a \tau_+(t)dt\right] = 0, \quad x \in (-c, c),$$

де

$$g(x) = \frac{1}{a-b}\left((a+x)\ln\frac{b+x}{a+x} + (a-x)\ln\frac{a-x}{b-x}\right) +$$
$$+\ln\frac{(c+x)(b-x)}{(c-x)(b+x)}, \quad \lambda_0 = E_f / E.$$

Окрім того має виконуватися умова загальної рівноваги накладки

$$\int_{-a}^{a}\tau_{xy}(t)dt = P + \int_{-a}^{a}\tau_+(t)dt. \qquad (6)$$

Числові дослідження виконаємо для сталих зсувних напружень $\tau_+(x) = \tau_+$ та відсутності зосередженої сили ($P = 0$). Вираз для напружень $\tau_{xy}(x)$ подаємо у вигляді ряду за многочленами Чебишева першого роду $T_n(x)$ з виділеною кореневою особливістю та невідомими коефіцієнтами b_n:

$$\tau_{xy}(x) = \frac{\tau_+ c}{\sqrt{c^2 - x^2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x), \quad |x| < c. \qquad (7)$$

Після підстановки (7) у рівняння (5), (6) отримуємо нескінченну систему нелінійних рівнянь стосовно довжини зони передруйнування $(a-c)$ та коефіцієнтів b_n, яку розв'язували методом редукції.

На рис. 2 подано залежності відносної загальної довжини зони передруйнування $\varepsilon = (a-c)/a$ від параметра навантаження $\tilde{\tau}_+ = \tau_+ / \tau_s^*$ при фіксованих відносній жорсткості λ_0 та довжині ділянки розпушення $\gamma = (a-b)/a$: для ліній *1*, *4* – $\lambda_0 = 10^9$, для *2*, *5* – $\lambda_0 = 10$, для *3*, *6* – $\lambda_0 = 10/3$; параметр $\gamma = 0{,}05$ відповідає лініям *1*, *2*, *3*, $\gamma = 0{,}0001$ – для *4*, *5*, *6*.

Зі зростанням жорсткості накладки загальна довжина зони передруйнування збільшується. За наперед заданої довжини ділянки розпушення за-

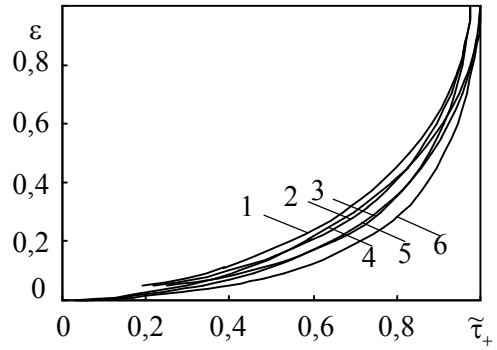

Рис. 2. Довжина зони передруйнування

гальна довжина зони передруйнування не може бути меншою від неї, і це відповідає обриву ліній в околі початку координат, що передбачає деяке мінімальне навантаження, за якого починається розвиток ділянки нелінійного деформування

На рис. 3 подано розподіл контактних дотичних напружень $\tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy} / \tau_s^*$ уздовж правої половини накладки (на лівій – картина симетрична) при фіксованому навантаженні $\tilde{\tau}_+ = 0{,}3$ та жорсткості $\lambda_0 = 20$: для лінії *1* параметр $\gamma = 0{,}1$, ($\varepsilon = 0{,}1021$); *2* – $\gamma = 0{,}05$, ($\varepsilon = 0{,}0714$); *3* – $\gamma = 0{,}0001$ ($\varepsilon = 0{,}0434$).

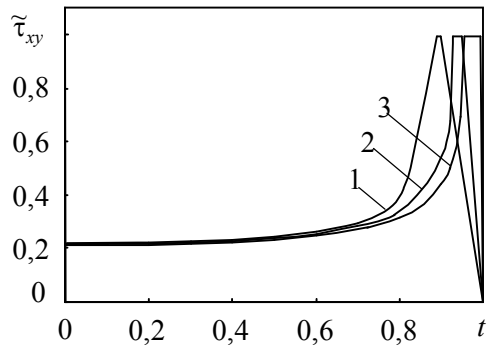

Рис. 3. Розподіл напружень під накладкою

Основна частина навантаження від накладки на пластину передається в околі її кінців. В середній частині контактні напруження практично не залежать від подання в зоні передруйнування і при $t = x/a = 0$ (середина накладки) узгоджуються з результатами праці [6].

Дотичні напруження уздовж межі зчеплення пластини з накладкою спричиняють у поперечному перерізі останньої осьові зусилля, розподіл яких обчислюємо за формулою

$$\tilde{P}(t) = \frac{\sigma_{xx} h}{2\tau_s^*} = \frac{1}{2\tau_s^* h}\left[\int_x^a \tau_+(t)dt - \int_x^a \tau_{xy}(t)dt\right].$$

Їх розподіл за фіксованого навантаження $\tilde{\tau}_+ = 0{,}3$ та жорсткості $\lambda_0 = 20$ подано на рис. 4: для лінії *1* параметр $\gamma = 0{,}1$; *2* – $\gamma = 0{,}05$; *3* – $\gamma = 0{,}0001$.

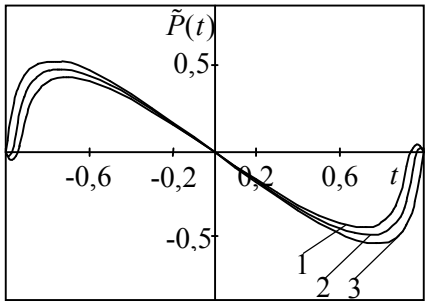

Рис. 4. Осьові розривні зусилля у накладці

Осьові розривні зусилля в лівій половині накладки розтягуючі (максимальне значення при $t = x/a = 0{,}7$ для лінії *1*, для *2* – $t = 0{,}74$, для *3* – $t = 0{,}77$), на середині накладки ($t = 0$) вони дорівнюють нулю. В правій частині картина антисиметрична і осьові зусилля стискаючі. Точка максимуму зміщується до краю при зменшенні довжини ділянки розпушення.

Список використаних джерел

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theoric geschweisster Verbindungen // Ingenieur – Archiv. – 1932. – Bd. 3, Heft 2. – S. 123-129.
2. *Muskhelishvili N. I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. – M.: Nauka, 1966. – 707 p. (in Russian).
3. *Kalandiya A. I.* Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity. – Nauka: Moscow, 1973. – 303 p. (in Russian).
4. *Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M.* Contact Problems of the Theory of Plates and Shells. – M.: Mashinostroenie, 1980. – 411 p. (in Russian).
5. *Popov G. Ya.* Concentration of elastic stress close to stamps, cross sectional view, thin inclusions and reinforcements. – M.: Nauka, 1982. – 344 p. (in Russian).
6. *Alexandrov V. M., Mkhitaryan S. M.* The contact problems for solids with thin coatings and layers. – M., Nauka, 1983. – 488 p. (in Russian).
7. *Sulym G. T.* Basis of math theory of thermoelastic balance of deformable solids with thin inclusions. – Lviv: Research & publishing center NTS, 2007. – 716 p. (in Ukraine).
8. *Kundrat M. M.* Limited balance and local destroying of plate with a lining. // Journal RDTU. Hydromelioration and hydravlic engineering. Special issue. – Rivne, 1999. – P. 200-204. (in Ukraine).

Надійшла до редколегії 31.03.13