

УДК 539.595

Лимарченко В. О.<sup>1</sup>, аспірант

## Поведінка трубопроводу на рухомій основі при імпульсному збуренні коливаний

Досліджується задача коливаний трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Труба кругового перетину консольно закріплена на рухомій основі. Розглядається поведінка системи при імпульсному збуренні основи трубопроводу. Отримано графіки коливаний кінця труби для різних швидкостей потоку рідини, включаючи випадок, коли рідина залишається нерухомою. Проаналізовано вплив швидкості руху рідини на поведінку системи та розглянуто умови, за яких система може приймати альтернативне положення рівноваги.

Ключові слова: трубопровід, швидкісна течія рідини, рухома основа, дискретна модель системи, сили взаємодії, імпульс, поштовх.

<sup>1</sup> Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64  
e-mail: vladimir\_limarchenko@yahoo.com

### Вступ

Метою даної роботи є аналіз характеру коливаний системи при короткотривалому імпульсному збуренні основи трубопроводу. В якості такого збурення розглядаємо поштовх основи трубопроводу за гармонічним законом в поперечному напрямку відносно труби. Для дослідження цієї задачі використовуємо нелінійну постановку, яка враховує можливість малих рухів основи трубопроводу в поперечному та поздовжньому напрямках. Така постановка також дозволяє врахувати прикладення зосереджених сил саме до точок закріплення трубопроводу, а не розподілених по всій довжині труби.

Механічна система (рис. 1) складається з рухомої основи, рух якої вважаємо заданим, трубопроводу, який описується моделлю пружної балки зі згинною жорсткістю  $EJ$ , площею поперечного перерізу  $F$  та масою  $M_{TP} = \mu l$ , де  $\mu$  – лінійна густина, а  $l$  – довжина трубопроводу, й ідеальної, однорідної, нестисливої рідини, яка має масу  $M_p = \rho l$  ( $\rho$  – лінійна густина рідини), та рухається в трубопроводі з заданою постійною швидкістю. Вважаємо, що рух системи відбувається в одній площині.

V. O. Limarchenko<sup>1</sup>, PhD student

## Behavior of pipeline on a moving base with impulse excitation of oscillations

The problem of oscillations of pipeline with flowing liquid on a moving foundation is under consideration. The system consists of tube of circular cross-section, attached as cantilever to a moving foundation. We consider the behavior of the system under impulse disturbance of the pipeline base. The plots of oscillations of the free end of the pipe for different velocities of fluid flow have been obtained, including the case when the fluid remains stationary. The influence of the fluid velocity on the behavior of the system and the conditions under which the system can obtain alternative equilibrium have been analyzed.

Key Words: pipeline, high-speed liquid flow, moving foundation, discrete model of the system, forces of interaction, impulse, push.

<sup>1</sup> The Taras Shevchenko Kiev National University, 01601, Kyiv, Volodymyrska street, 64  
e-mail: vladimir\_limarchenko@yahoo.com

В більшості попередніх робіт [1-3] основа трубопроводу вважається нерухомою, а силова взаємодія може бути врахована лише за рахунок включення відповідних членів у вираз потенціальної енергії системи. Але такий підхід не дозволяє отримати реальні переміщення основи трубопроводу в будь-який момент часу. Модель для дослідження поведінки трубопроводу у випадку імпульсного збурення було побудовано на основі підходів робіт [1, 4, 6]. Використовувався мішаний опис руху складових системи, що дозволило отримати дискретну модель руху системи на основі методу модальної декомпозиції.

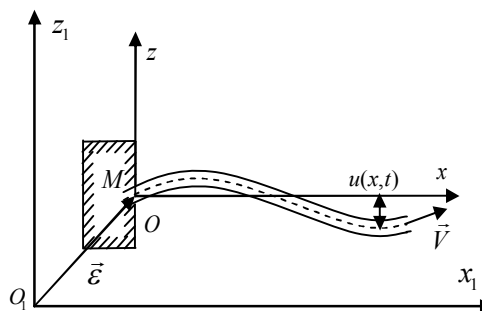


Рис. 1. Трубопровід з рідиною на рухомій основі

### Математична модель системи

Побудова моделі полягає в отриманні функції Лагранжа для подальшого складання рівнянь руху на основі рівнянь Лагранжа другого роду та детально описана в статті [6].

Для побудови дискретної моделі системи виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t).$$

Тут  $N$  – кількість форм коливань трубопроводу.

Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за  $A_i(x)$  беремо форми коливань труби як балки з нерухою рідиною, виражені через функції Крилова. В результаті дискретизації функції Лагранжа рівняння Лагранжа другого роду набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \\ & + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \\ & - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\ & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} (d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\ & - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 + \\ & + \frac{\rho}{N_r(\rho + \mu)} \psi_r^1 [V \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z] + \frac{\rho}{N_r(\rho + \mu)} \times \\ & \times \sum_{i=1}^N c_i \beta_{ir}^2 \left[ -2\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left( \rho + \frac{1}{2} \mu \right) + \dot{\varepsilon}_z^2 \left( \frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho \right) \right] - \\ & - \frac{\rho}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) \dot{\varepsilon}_x + \\ & + \frac{3\rho}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi_{ijr}^3 \left[ -2V \dot{\varepsilon}_z + \frac{5}{2} \dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_z \right] + \\ & + \frac{\mu - 3\rho}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j (\phi_{irj}^2 - \phi_{jir}^2) \dot{\varepsilon}_z + \\ & + \frac{9\rho}{2N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k (d_{ijrk}^3 - d_{kjir}^3) \dot{\varepsilon}_x + \\ & + \frac{2}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 \left[ -4\rho V \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_x^2 \left( -\frac{5}{2} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) + \right. \\ & \left. + \dot{\varepsilon}_z^2 \left( \frac{27}{8} \rho - \frac{1}{8} \mu \right) \right] - \frac{1}{N_r} \psi_r^0 \ddot{\varepsilon}_z + \frac{\rho}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \dot{\varepsilon}_x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\rho}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \ddot{\varepsilon}_x - \frac{\mu - 3\rho}{2N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi_{ijr}^2 \ddot{\varepsilon}_z - \\ & - \frac{3\rho}{2N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijkr}^3 \ddot{\varepsilon}_x. \end{aligned}$$

Введені величини  $\psi_i^0$ ,  $\psi_i^1$ ,  $N_i$ ,  $\beta_{ij}^1$ ,  $\beta_{ij}^2$ ,  $\kappa_i^4$ ,  $\phi_{ijk}^2$ ,  $\phi_{ijk}^3$ ,  $d_{ijkl}^2$ ,  $d_{ijkl}^3$ ,  $d_{ijkl}^4$ ,  $d_{ijkl}^6$  є квадратурами від відомих форм коливань  $A_i(x)$  по відомій області та визначаються чисельно.

Підставимо замість члену рівнянь руху, що містить  $\ddot{c}_r$ , його лінійне представлення та проведемо заміну змінних. При проведенні підстановки можна обмежитись тільки лінійними членами рівнянь, оскільки ми розглядаємо величини тільки до третього порядку малості.

Отримана система рівнянь описує рух трубопроводу при заданому законі вібрації основи.

Систему рівнянь руху шляхом зниження порядку можна легко звести до форми Коші та інтегрувати чисельно методом Рунге – Кута. Для випадку сумісного руху трубопроводу з рідиною, необхідно вирішити лінійну алгебраїчну задачу, щоб всі рівняння системи містили другу похідну по змінній в лівій частині та вирази відносно змінних та їх перших похідних в правій частині. В цілому система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів деформації трубопроводу.

### Аналіз руху системи трубопровід – рідина при поздовжній вібрації основи

В результаті чисельного моделювання було отримано та проаналізовано дані про поведінку системи трубопровід – рідина при короткочасному імпульсному збуренні основи в поперечному напрямку  $O_1z_1$  відносно труби (рис. 1). Труба довжиною 1 м виготовлена із алюмінію. Швидкість руху рідини вздовж трубопроводу вважається постійною.

У випадку імпульсного збурення задаємо закон руху основи трубопроводу у вигляді  $\varepsilon_z = A \sin \omega t$  при  $t \in [0, \pi/\omega]$ ;  $\varepsilon_z = 0$  при  $t \in [\pi/\omega, \infty)$ .

Параметр  $A$  впливає на амплітуду імпульсу збурення. Параметр  $\omega$  впливає на тривалість та плавність імпульсу. В нашому випадку обираємо відносно невелику частоту  $\omega = 20$ , що приблизно дорівнює половині власної частоти першої форми коливань балки. При такому співвідношенні

початкове збурення буде діяти приблизно на про-  
тязі повного періоду першої форми коливань.

Зауважимо, що критична швидкість течії ріди-  
ни  $V_{KP} = 20,94$  м/с, а власна частота першої фор-  
ми коливань балки  $\omega_1 = 40,27$ . Відлік часу про-  
водиться в періодах першої форми коливань  
 $T_1 = 0,1567$  с.

Для різних параметрів збурення  $A$ ,  $\omega$  та різ-  
них швидкостей рідини в трубі  $V$  шляхом чи-  
сельного моделювання знайдено графіки руху  
вільного кінця балки по осі  $Oz$  та порівняльні  
графіки впливу форм коливань на процес руху  
системи. Наведемо графіки найбільш характер-  
них випадків, на яких продемонструємо основні  
закономірності та залежності процесу коливань  
від обраних параметрів.

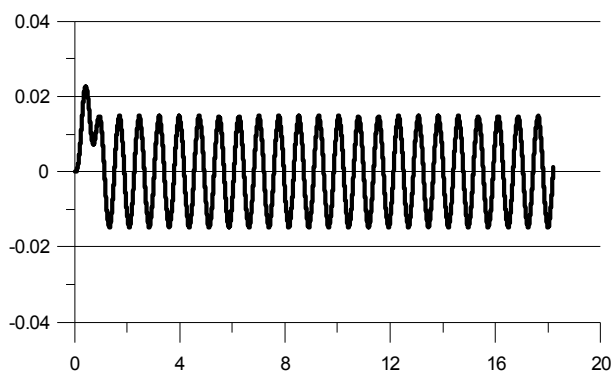


Рис. 2. Графік коливань кінця труби при  
 $V = 0$  м/с;  $A = 0,1$ ;  $\omega = 20$

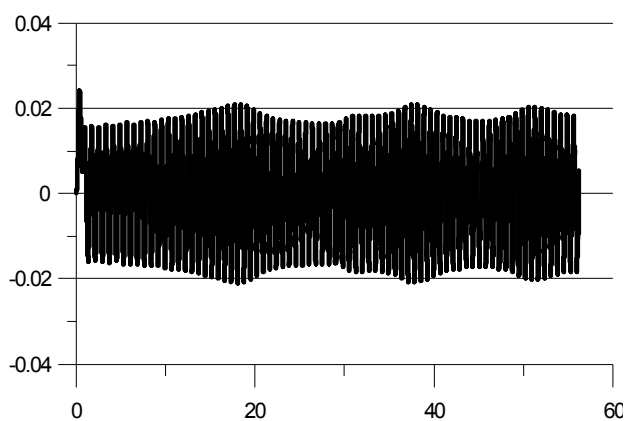


Рис. 3. Графік коливань кінця труби при  
 $V = 5$  м/с;  $A = 0,1$ ;  $\omega = 20$

В першу чергу розглянемо випадок, коли рі-  
дина залишається нерухомою, тобто швидкість  
потoku рівна  $V = 0$  м/с (рис. 2). Бачимо, що спо-  
чатку відхилення кінця труби різко зростає за  
рахунок дії імпульсу, а потім амплітуда коливань  
набуває певного сталого значення і майже не

змінюється із часом. Картина коливань має регу-  
лярний характер.

Якщо розглянути процес коливань трубопро-  
воду з рідиною, що рухається, після такого са-  
мого імпульсу (рис. 3), побачимо, що наявність  
рухомої рідини якісно впливає на розвиток коли-  
вань. Спостерігається зміна амплітуди коливань  
із часом, що спричинена дією сил інерції Коріо-  
ліса та відцентрової сили, що діє з боку рідини на  
стілки труби. Бачимо, що кінець трубопроводу  
знає більших відхилень, ніж у попередньому  
випадку.

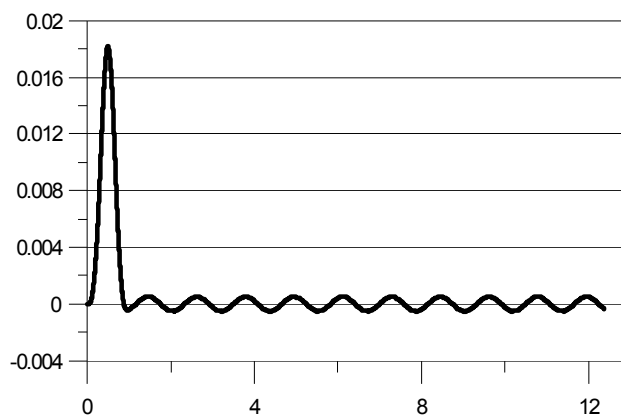


Рис. 4. Графік коливань кінця труби при  
 $V = 5$  м/с;  $A = 0,05$ ;  $\omega = 20$

На графіку рис. 4 бачимо, що невелика швид-  
кість потоку рідини, біля  $0,25 V_{KP}$ , може також  
мати стабілізуючу дію для процесу коливань. От-  
римавши збурення за рахунок імпульсу, система  
переходить до дуже малих, порівняно з величи-  
ною імпульсу, коливань відносно початкового  
положення. Варто зазначити, що у випадках з ам-  
плітудами  $A = 0,06$  та  $A = 0,04$ , амплітуди коли-  
вань набагато більші, ніж у випадку  $A = 0,05$ .

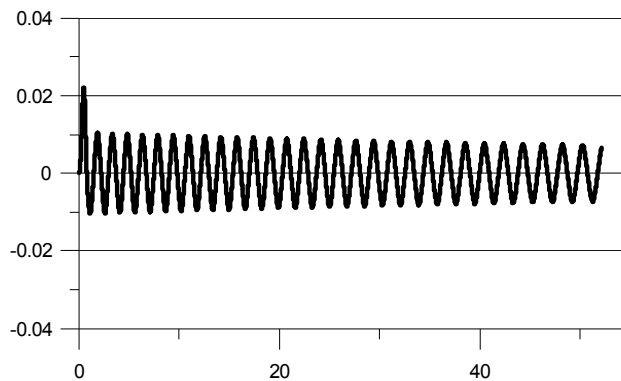


Рис. 5. Графік коливань кінця труби при  
 $V = 10$  м/с;  $A = 0,05$ ;  $\omega = 20$

Явище стабілізації коливань трубопроводу також спостерігається при збільшенні швидкості потоку до  $V = 10$  м/с, що становить приблизно  $0,5 V_{KP}$  (рис. 5). З графіку бачимо, що амплітуда коливань поступово та рівномірно зменшується, що призводить до довготривалого процесу коливань.

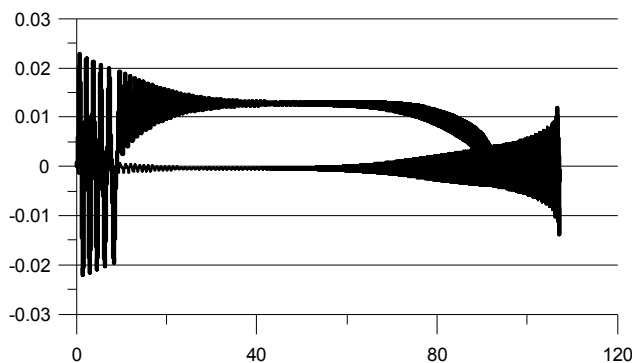


Рис. 6. Графік першої та другої форм коливань  
 $V = 15$  м/с;  $A = 0,05$ ;  $\omega = 20$

Якщо збільшити швидкість потоку до  $0,5 V_{KP}$ , що становить  $V = 15$  м/с в нашому випадку, можемо спостерігати втрату трубопроводом прямолінійної стійкості та вихід системи на альтернативне положення рівноваги. На рис. 6 наведено порівняльний графік першої та другої форм коливань. З малюнку видно, що вихід на альтернативне положення рівноваги здійснюється за рахунок зміщення по першій формі, друга форма продовжує коливатись відносно прямолінійного положення. Також бачимо, що при швидкості потоку  $V = 15$  м/с не спостерігається стрибкоподібного зменшення амплітуди по закінченні дії імпульсу, як у всіх попередніх випадках. Амплітуда

спадає плавно, після чого трубопровід переходить до коливань відносно певного викривленого положення.

Наприкінці процесу помітним стає вплив другої форми та інших вищих форм на характер коливань.

### Висновки

В роботі розглянуто задачу динаміки трубопроводу з рідиною на рухомій основі. Розроблено модель руху такої системи для випадку заданого руху основи трубопроводу. Використовуючи метод модальної декомпозиції, побудовано нелінійну скінченновимірну модель динаміки системи трубопроводу – рідина для довільної кількості форм коливань (при чисельній реалізації приймалося до уваги сім форм коливань), що дало змогу більш детально проаналізувати рух системи в перехідних режимах. Проаналізовано поведінку системи при збудженні руху за рахунок заданого поперечного імпульсу, що діє на основу трубопроводу на початку процесу коливань. Показано, що поведінка системи може якісно змінюватись при різних значеннях швидкості потоку рідини та при його відсутності. Так, при високій швидкості потоку рідини система може втрачати стійкість прямолінійної форми та здійснювати перехід до альтернативного положення рівноваги (при швидкості потоку, близькій до критичної швидкості). При нижчих швидкостях потік рідини має стабілізуючий вплив на коливання трубопроводу. На відміну від випадків збурення за заданим гармонічним законом, у випадку імпульсного збурення явище амплітудної модуляції коливань не спостерігається.

### Список використаних джерел

1. Bondar N. G. Nonlinear Autonomous Problems in Mechanics of Elastic Systems. – Kyiv: Budyvelnyk, 1971. – 140 p. (in Russian).
2. Kuiper G. L. Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid // Journal of Fluids and Structures. – 2008. – No. 24. – P. 541-558.
3. Paidoussis M. P. A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – No. 280. – P. 141-157.
4. Babakov I. M. Theory of vibrations. – Moscow: Nauka, 1968. – 560 p. (in Russian).
5. Vasilevskiy Yu. E., Limarchenko O. S. Nonlinear model of pipeline dynamics with high-speed fluid flow // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2006. – № 4. – P. 322-334. (in Ukrainian).
6. Limarchenko V. O. Dynamics of pipeline with liquid on a vibrating foundation // Physico-mathematical modelling and informational technologies. – 2012. – № 15. – P. 40-48. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 20.05.13