

УДК 539.3

Лібов Д. Ю.¹, аспірант

Крайовий резонанс при неосесиметричній деформації пружного циліндра скінченної довжини

Розглянуто явище крайового резонансу при неосесиметричній деформації пружного скінченного циліндра. Представлено точний розв'язок граничної задачі, отриманий методом суперпозиції. Показано, що визначник нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює нулю при певній частоті, яка лежить нижче першої частоти запирання нескінченного хвилеводу, для достатньо довгого циліндра. Форма такого крайового резонансу характеризується локалізацією області інтенсивних рухів в околі торців циліндра.

Ключові слова: крайовий резонанс, пружний циліндр, частотний спектр.

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: dmytro.libov@univ.net.ua

1. Вступление

Закономерности процессов отражения и распространения гармонических волн в упругом цилиндре были предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, ведущихся уже более столетия, начиная от работы Похгаммера [1]. В настоящее время накоплены и систематизированы [2, 3] обширные данные о свойствах распространяющихся (однородных) и нераспространяющихся (неоднородных) нормальных волн в бесконечном упругом цилиндре. Роль последних в интерпретации волнового поля проявилась в связи с явлением краевого резонанса при осесиметричных вынужденных колебаниях конечного и полубесконечного цилиндра [4, 5]. В [6, 7] отмечено, что в частных случаях, когда коэффициент Пуассона ν материала цилиндра равен нулю или $\approx 0,127$, наблюдается «чистое» проявление такого резонанса в неоднородных волнах без связи их (через посредство граничных условий на торце цилиндра) с движениями в распространяющейся моде.

Аналогичный по свойствам (чистый) краевой резонанс наблюдался автором работы [8] в связи

D. Yu. Libov¹, PhD student

The end resonance under non-axisymmetric deformation of a cylinder of finite length

The end resonance phenomenon under the non-axisymmetric deformation of a finite elastic cylinder is studied. The exact solution to the boundary-value problem obtained by the superposition method is presented. It is found that the determinant of an infinite system of linear algebraic equations is equal to zero at a particular frequency, lying below the lowest cut-off frequency of an infinite waveguide, and for a sufficiently long cylinder. The form of this end resonance is characterized by large displacements localized near the cylinder ends.

Key Words: end resonance, elastic cylinder, frequency spectrum.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: dmytro.libov@univ.net.ua

с экспериментальным исследованием неосесимметричных резонансных колебаний алюминиевых цилиндров. Доказательству существования изолированного резонанса в полубесконечном цилиндре для любого ν посвящено сообщение [9].

В данной работе рассматривается ряд вопросов о влиянии коэффициента Пуассона, геометрических параметров, типа симметрии движений – неосесимметрическая антисимметрическая деформация – на явление краевого резонанса в цилиндре конечной длины.

2. Неосесимметричные нормальные волны в бесконечном цилиндре

На рис. 1 представлены дисперсионные свойства неосесимметричных мод

$$\vec{u}(r_1, \theta, z_1) \exp(i\omega t) = \vec{U}(r_1) \exp[i(\ell\theta + \kappa z_1 + \omega t)]$$

(ℓ – порядок круговой координаты θ , κ – постоянная распространения, ω – круговая частота, t – время) бесконечного упругого изотропного цилиндра $0 \leq r_1 \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z_1| < \infty$ со свободной

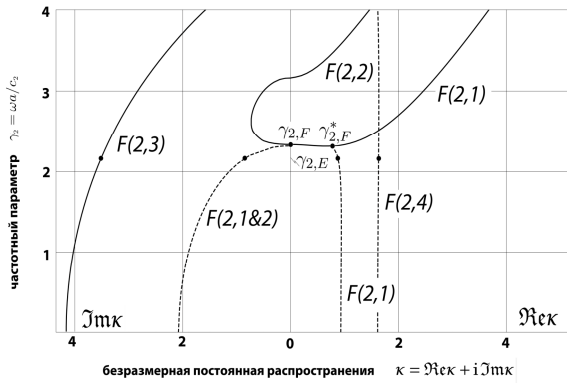


Рис. 1. Дисперсионный спектр бесконечного цилиндра для нормальных волн кругового порядка два и коэффициента Пуассона $\nu = 0,344$

от напряжений боковой поверхностью. Эти свойства описываются дисперсионным уравнением [9]

$$P(\kappa)Q(\kappa) - C(\kappa)T(\kappa) = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{cases} P(\kappa) = \frac{(\kappa^2 + q_2^2)(\kappa^2 + q_2^2 + 2\ell^2)}{4\kappa^2 [\mathfrak{I}_\ell(iq_1) - \ell]} - \frac{q_2^2 + \ell^2}{\mathfrak{I}_\ell(iq_2) - \ell} + \frac{\gamma_2^2}{2\kappa^2}, \\ Q(\kappa) = \mathfrak{I}_\ell(iq_2) - \ell - \frac{q_2^2 + \ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{2[\mathfrak{I}_\ell(iq_1) - \ell]}, \\ T(\kappa) = \left[\frac{\kappa^2 + q_2^2}{2\kappa^2 [\mathfrak{I}_\ell(iq_1) - \ell]} - \frac{1}{\mathfrak{I}_\ell(iq_2) - \ell} + \frac{\gamma_2^2}{2\kappa^2} \right] \ell, \\ C(\kappa) = \left[\mathfrak{I}_\ell(iq_2) - \ell - \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2 + q_2^2 + 2\ell^2}{4[\mathfrak{I}_\ell(iq_1) - \ell]} \right] \ell \end{cases}$$

и

$$q_s^2 + \gamma_s^2 = \kappa^2, \quad \gamma_s = \frac{\omega a}{c_s},$$

$$\mathfrak{I}_\ell(iq_s) = q_s \frac{I_{\ell-1}(q_s)}{I_\ell(q_s)} \quad (s = 1, 2).$$

Здесь c_1 – скорость волн расширения, c_2 – скорость сдвиговых волн; I_ℓ – модифицированная функция Бесселя порядка ℓ .

Результаты решения дисперсионного уравнения (1), определяющие допустимые значения κ для частотного параметра γ_2 , представляют дисперсионные ветви $F(\ell, m)$ в прямоугольной системе координат $(\{\Im\kappa, \Re\kappa\}, \gamma_2)$. На спектре представлены низшие ($m = 1, 2, 3$) ветви для $\nu = 0,344$ и $\ell = 2$. Нормальные моды $F(\ell, m)$ круговых порядков $2 < \ell < \infty$ и других значений ν не имеют качественных отличий от представленных на рис. 1 [10]. На дисперсионном спектре сплошными линиями изображены действительные и

чисто мнимые участки ветвей, штриховыми – проекции комплексных ветвей на действительную и мнимую плоскость. В первой моде $F(2, 1)$ постоянная распространения κ есть комплексной в области $\gamma_2 < \gamma_{2,F}^*$ ($\gamma_{2,F}^* \approx 2,317$ – критическая частота). Поэтому ниже критической частоты $\gamma_2 < \gamma_{2,F}^*$ волновод заперт, вместе с тем полубесконечный цилиндр имеет резонанс при $\gamma_2 \approx 2,135$ [7, 9]. Это предопределяет интерес к исследованию резонанса в неоднородных волнах в цилиндре конечной длины.

3. Неосесимметричные антисимметричные колебания цилиндра конечной длины

Решение уравнений Ламе для амплитуд вектора перемещения $\vec{u}(r_1, \theta, z_1)$ (гармонический множитель $\exp(i\omega t)$ здесь и далее опущен)

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \omega^2 \vec{u} = 0$$

в конечном цилиндре $0 \leq r_1 \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z_1| \leq H$ строится методом суперпозиции [10] и имеет вид

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= \cos(\ell\theta) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_r^c(\kappa_n, r, z) + \sum_{j=1}^{\infty} U_r^p(\lambda_j, r, z) \right\}, \\ u_\theta(r, \theta, z) &= -\sin(\ell\theta) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_\theta^c(\kappa_n, r, z) + \sum_{j=1}^{\infty} U_\theta^p(\lambda_j, r, z) \right\}, \\ u_z(r, \theta, z) &= \cos(\ell\theta) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_z^c(\kappa_n, r, z) + \sum_{j=1}^{\infty} U_z^p(\lambda_j, r, z) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$U_r^c = (-1)^n \left(x_n \left[\frac{\kappa_n^2 + q_2^2}{2\kappa_n^2} \frac{I'_\ell(q_1 r)}{I'_\ell(q_1)} - \frac{I'_\ell(q_2 r)}{I'_\ell(q_2)} \right] + z_n \ell \left[\frac{I_\ell(q_2 r)}{r I_\ell(q_2)} - \frac{I'_\ell(q_1 r)}{2 I'_\ell(q_1)} \right] \right) \sin(k_n z),$$

$$U_r^p = y_j h \left[\frac{p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{\lambda_j \operatorname{sh} p_2 h} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j p_1} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} \right] \frac{J'_\ell(\lambda_j r)}{J_\ell(\lambda_j)},$$

$$U_\theta^c = (-1)^n \left(x_n \left[\frac{\kappa_n^2 + q_2^2}{2\kappa_n^2 q_1} \frac{I_\ell(q_1 r)}{I'_\ell(q_1)} - \frac{I_\ell(q_2 r)}{q_2 I'_\ell(q_2)} \right] \frac{\ell}{r} + z_n \left[q_2 \frac{I'_\ell(q_2 r)}{I_\ell(q_2)} - \frac{\ell^2}{2q_1 r} \frac{I_\ell(q_1 r)}{I'_\ell(q_1)} \right] \right) \sin(k_n z),$$

$$U_\theta^p = y_j h \left[\frac{p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{\lambda_j^2 \operatorname{sh} p_2 h} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2 p_1} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} \right] \frac{\ell J_\ell(\lambda_j r)}{r J_\ell(\lambda_j)},$$

$$U_z^c = (-1)^{n+1} \left(x_n \left[\frac{q_2 I_\ell(q_2 r)}{k_n I_\ell(q_2)} - \frac{k_n^2 + q_2^2 I_\ell(q_1 r)}{2k_n^2 q_1 I_\ell(q_1)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} z_n \frac{\ell k_n I_\ell(q_1 r)}{q_1 I_\ell(q_1)} \right) \cos(k_n z), \\ U_z^p = y_j h \left[\frac{\text{ch } p_2 z}{\text{sh } p_2 h} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2 \text{ch } p_1 z}{2\lambda_j^2 \text{sh } p_1 h} \right] \frac{J_\ell(\lambda_j r)}{J_\ell(\lambda_j)}. \quad (3)$$

Здесь $\bar{u}(r, \theta, z)$ – безразмерный вектор перемещения; $r = r_1/a$, $z = z_1/a$; J_ℓ – обычная функция Бесселя порядка ℓ ; λ_j – ненулевые корни уравнения $J'_\ell(\lambda_j) = 0$, расположенные в возрастающем порядке; и

$$p_s^2 + \gamma_s^2 = \lambda_j^2, \quad q_s^2 + \gamma_s^2 = \kappa_n^2 \quad (s = 1, 2); \\ \kappa_n = \pi(n - 1/2) / h \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

Аналогично [11] удается показать, что для неизвестных x_n, z_n, y_j в (3) справедливы асимптотические равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_j = a_0 = \text{const}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \kappa_n^4 = \text{const}. \quad (4)$$

Выполняя с помощью (2), (3) граничные условия

$$\sigma_r = \tau_{r0} = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r = 1; \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_\ell(\lambda_j r)}{J_\ell(\lambda_j)}; \quad \tau_{zr} = \tau_{z0} = 0 \quad \text{при } |z| = h,$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно x_n, z_n, y_j . Отнимая и прибавляя к рядам, содержащим коэффициенты с неизвестными x_n, z_n, y_j , их асимптотические значения (4), бесконечную систему уравнений сводим к следующей конечной системе:

$$\begin{cases} x_n P(\kappa_n) + z_n C(\kappa_n) + \sum_{j=1}^J y_j D_{jn} - a_0 \sum_{j=J}^{\infty} D_{jn} = 0; \\ x_n T(\kappa_n) + z_n Q(\kappa_n) + \sum_{j=1}^J y_j G_{jn} - a_0 \sum_{n=N}^{\infty} G_{jn} = 0; \\ y_j R(\lambda_j) + \sum_{n=1}^N x_n [K_{nj} + L_{nj}] - a_0 \sum_{n=N}^{\infty} K_{nj} = g_j, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$R(\lambda_j) = p_2 h \text{th } p_2 h - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} h \text{th } p_1 h, \\ D_{jn} = \left(\frac{k_n^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \frac{k_n^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) \frac{\lambda_j^2 - \ell^2}{\lambda_j^2} - \frac{\gamma_0^2 \gamma_2^2 - 2\ell^2}{2\lambda_j^2 (\lambda_j^2 + q_1^2)},$$

$$G_{jn} = \left(\frac{k_n^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{k_n^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} + \frac{\gamma_0^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) \frac{\ell^2}{\lambda_j^2}, \\ K_{nj} = \left(\frac{2\lambda_j^2}{k_n^2 + p_1^2} - \frac{2\lambda_j^2}{k_n^2 + p_2^2} + \frac{\gamma_0^2 \gamma_2^2}{k_n^2 (k_n^2 + p_1^2)} \right) \frac{\lambda_j^2 - \ell^2}{\lambda_j^2}, \\ L_{nj} = \frac{k_n^2 + \gamma_0^2}{k_n^2 + p_1^2} \frac{\ell \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - \ell^2}, \quad \gamma_0^2 = \frac{v \gamma_1^2}{1 - 2v}.$$

Для замыкания системы (5) используется уравнение, выражающее разность нормальных напряжений σ_r и σ_z на реберных окружностях $r = 1$ и $|z| = h$.

4. Краевой резонанс в конечном цилиндре

Непосредственная организация процесса вычислений полностью аналогична детально описанному в [11] алгоритму обработки решения задачи о колебаниях прямоугольника. При решении системы (5) оставлялось $N = 30$ неизвестных x_n и $J = 30$ неизвестных y_j . Самоуравновешенной нагрузке на торцах цилиндра соответствовали коэффициенты $g_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера).

Структура резонансного спектра (зависимость γ_2 от h) в области $\gamma_2 < \gamma_{2,F}^*$ для $v = 0,344$ и $\ell = 2$ представлена на рис. 2. Резонансные спектры в частотном диапазоне $\gamma_2 < \gamma_{2,F}$ для круговых порядков $2 < \ell < \infty$ и других значений v не имеют качественных отличий от представленных на рис. 2. Для иллюстрации возможностей теоретического способа определения резонансных частот, на рис. 2 приведены экспериментальные данные (•) работы [6] в диапазоне $h < 2$.

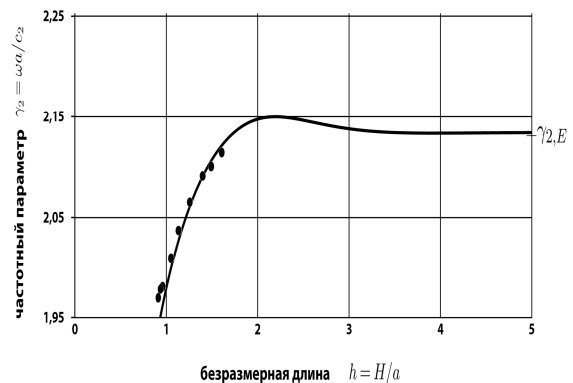


Рис. 2. Резонансный спектр конечного цилиндра для кругового порядка два и коэффициента Пуассона $v = 0,344$

Спектр собственных частот длинного цилиндра при $h > 3$ и $\gamma_2 = \gamma_{2,E} \approx 2,134$ представляет горизонтальное плато, соответствующее краевому резонансу. В связи с этим следует отметить, что частота краевого резонанса полубесконечного цилиндра для $\nu = 0,3317$ и $\ell = 2$ заключена в интервале $2,13 < \gamma_2 < 2,14$ [6].

На рис. 3 показана форма перемещений точек поверхности цилиндра на частоте несколько выше $\gamma_{2,E}$ для $h = 4$. Поскольку $\gamma_{2,E} < \gamma_{2,F}^*$, то такой краевой резонанс происходит только в неоднородных волнах бесконечного цилиндра для любого ν .

Список використаних джерел

1. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder // J. reine und angew. Math. – 1876. – N 55. – S. 324-336. (in German).
2. *Meeker T. R., Meitzler A. H.* Guided wave propagation in elongated cylinders and plates. – Phys. Acoust: Principles and Methods I, part A, 1964. – P. 140-203. (in Russian).
3. *Thurston R. N.* Elastic waves in rods and clad rods. // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – N 64. – P. 1-37.
4. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by wide-band and short-duration pulse technique. // J. Acoust. Soc. Am. – 1957. – N 29. – P. 189-194.
5. *McNiven H. D.* Extensional waves in a semi-infinite elastic rod. // J. Acoust. Soc. Am. – 1961. – N 33. – P. 23-27.
6. *Meleshko V. V.* The end resonance in a semi-infinite elastic cylinder. // Dokl. Akad. Nauk Ukr. RSR. – 1980. – N 12. – P. 920-924. (in Russian).
7. *Pagneux V.* Complex resonance and localized vibrations at the edge of a semi-infinite elastic cylinder. // Math. Mech. Solids. – 2012. – N 17. – P. 17-26.
8. *McMahon G. W.* Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders. // J. Acoust. Soc. Am. – 1964. – N 36. – P. 85-92.
9. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Properties of a wave field in a semi-infinite elastic cylinder (boundary resonance). // Mech. Solids. – 1982. – N 6. – P. 81-89.
10. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. // J. Acoust. Soc. Am. – 1972. – N 51. – P. 265-283.
11. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kiev: Naukova Dumka, 1981. – 284 p. (in Russian).

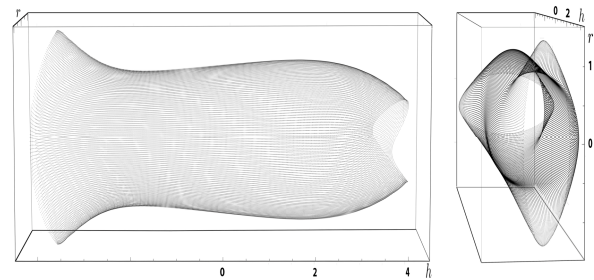


Рис. 2. Форма колебаний поверхности цилиндра при краевом резонансе

Надійшла до редколегії 18.05.13