УДК 539.3

Лобода В. В.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Шевельова А. Є.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Тулін К. О.[1], аспірант

Дугова тріщина з зонами контакту між включенням і матрицею

Розв'язується плоска задача для дугової тріщини між круговим включенням та нескінченною матрицею під дією довільно орієнтованого рівномірного напруження на нескінченості. Побудована та розв'язана методом механічних квадратур система сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій, які характеризують розкриття тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, дугова тріщина, сингулярне інтегральне рівняння.

[1] Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 49010, м. Дніпропетровськ, просп. Гагаріна, 72
e-mail: loboda@mail.dsu.dp.ua, allasheveleva@i.ua, 7780038@mail.ru

V. V. Loboda[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. E. Sheveleva[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
K. O. Tulin[1], PhD student

An arc crack with contact zones between an inclusion and a matrix

The plane problem for an arc crack between a circular inclusion and an infinite matrix under an arbitrary oriented uniform tension at infinity is solved. The system of singular integral equations with respect to unknown functions which characterize the crack opening is constructed and solved by the method of mechanical quadratures.

Key Words: interface crack, arc crack, singular integral equation.

[1] Oles Gonchar National University of Dnipropetrovsk, 49010, Dnipropetrovsk, Gagarina avenue, 72
e-mail: loboda@mail.dsu.dp.ua, allasheveleva@i.ua, 7780038@mail.ru

1. Вступ

Прямолінійна тріщина між двома матеріалами з урахуванням зон контакту її берегів досліджувалась у роботах [1-3] та ін.

У випадку дугової тріщини дослідження проблеми виникнення зон контакту берегів тріщини є навіть більш актуальним, оскільки дуже часто великі зони контакту мають місце навіть для однорідного матеріалу. Незважаючи на це контактна модель дугової тріщини досліджена значно менше. Стосовно цього питання можна вказати роботи [4, 5], де для однорідного та композитного матеріалів, відповідно, вказана проблема досліджувалась шляхом чисельного аналізу системи сингулярних інтегральних рівнянь та роботу [6], в якій для випадку всестороннього розтягнення пружної площини з відшарованим круговим включенням, отримано замкнутий розв'язок.

У даній роботі розглядається проблема дугової тріщини між матрицею та круговим включенням у полі віддаленого довільно орієнтованого одноосного навантаження. З використанням комплексних потенціалів [7] формулюється система сингулярних інтегральних рівнянь, для якої пропонується метод її чисельного розв'язання, що враховує можливі зони контакту берегів тріщини.

2. Формулювання проблеми

Розглянемо плоску задачу для тріщини з кутом розхилу $2\beta_0$, яка виникла між круговим включенням радіусу a і нескінченою матрицею. Вважаємо, що на нескінченості діє рівномірне розтягуюче напруження інтенсивності T, направлене під кутом ω до осі, що проходить через середину тріщини. Кут θ полярної системи координат (r, θ) також відраховуємо від цієї осі. Вважаємо, що механічні характеристики матриці μ_1, κ_1, а включення – μ_2, κ_2.

Припускаючи, що напруження на верхньому і нижньому берегах тріщини однакові або ж вони вільні від напружень, бачимо, що $\forall\theta$ напруження $\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)}$ при $z = t = ae^{i\theta}$. З урахуванням цієї умови одержуємо

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \\ = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \kappa_1\mu_2}\left\{G^+(t) + \lambda G^-(t) + \delta F(t)\right\}, \quad (1)$$

де

$$F(z)=\Phi_1(z)-\Theta_2(z),$$

$$G(z)=\frac{\kappa_1}{\mu_1}\Phi_1(z)+\frac{1}{\mu_2}\Theta_2(z) \quad \text{для} \quad z\in S_+,$$

$$F(z)=\Phi_2(z)-\Theta_1(z),$$

$$G(z)=\frac{\kappa_2}{\mu_2}\Phi_2(z)+\frac{1}{\mu_1}\Theta_1(z) \quad \text{для} \quad z\in S_-,$$

$$\Phi_k(z)=\phi_k'(z), \quad \Theta_k(z)=\Omega_k'(z),$$

$$\Omega_k(z)=z\bar{\phi}_k'\left(\frac{a^2}{z}\right)+\bar{\psi}_k\left(\frac{a^2}{z}\right), \quad k=1,2,$$

$$\lambda=\frac{\mu_1+\kappa_1\mu_2}{\mu_2+\kappa_2\mu_1}, \quad \delta=\frac{1-\kappa_1\kappa_2}{\mu_2+\kappa_2\mu_1}.$$

Функції $\phi_k'(z)$ та $\psi_k(z)$ – комплексні потенціали [7] для включення ($k=1$) і матриці ($k=2$), а «+» і «-» означають, що ми наближаємось до дуги $t=ae^{i\theta}$ з зовнішньої (S_+) і внутрішньої (S_-) частин, відповідно.

На основі представлення (1) можна легко сформулювати задачу лінійного спряження Гільберта – Рімана відносно функції $G(t)$. Розв'язок цієї задачі буде фізично коректним, якщо тріщина залишається відкритою. Але для випадку міжфазної дугової тріщини, як правило, виникають не тільки мікрозони, а і макрозони контакту. На можливості врахування цих зон в подальшому і зосередимо увагу.

3. Побудова сингулярного інтегрального рівняння (СІР)

Введемо функцію, що характеризує розкриття тріщини

$$d(\theta)=\left(u_1+iu_2\right)^+-\left(u_1+iu_2\right)^-, \quad |\theta|<\beta_0.$$

Запишемо $d'(\theta)$ у вигляді

$$d'(\theta)=\upsilon_x(\theta)+i\upsilon_y(\theta)=e^{i\theta}\left\{\upsilon_r(\theta)+i\upsilon_\theta(\theta)\right\}, \quad |\theta|<\beta_0, \quad (2)$$

де

$$\upsilon_x=\frac{d}{d\theta}\left(u_1^+-u_1^-\right), \quad \upsilon_y=\frac{d}{d\theta}\left(u_2^+-u_2^-\right). \quad (3)$$

Умова однозначності переміщень при обході контуру тріщини має вигляд

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} d'(\theta)d\theta=0. \quad (4)$$

Припустимо тепер, що на протилежних берегах задані напруження $\sigma_{rr}^{\pm}(a,\theta)=N(\theta)$ і $\sigma_{r\theta}^{\pm}(a,\theta)=S(\theta)$. Тоді задовольняючи за допомогою (1) граничним умовам на берегах тріщини і використовуючи представлення переміщень через комплексні потенціали, маємо

$$c_0\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right)+i\right\}\left\{\upsilon_r(\gamma)+i\upsilon_\theta(\gamma)\right\}d\gamma-$$

$$-\frac{c\beta}{a}\left\{\upsilon_\theta(\theta)-i\upsilon_r(\theta)\right\}=N(\theta)+iS(\theta)+P_0, \quad (5)$$

де

$$|\theta|<\beta_0, \quad P_0=n_1\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\upsilon_\theta(\gamma)d\gamma+in_2\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\upsilon_r(\gamma)d\gamma-$$

$$-\frac{2(1+\alpha)}{1+\alpha-2\beta}\Gamma+\frac{1+\alpha}{1+\beta}\bar{\Gamma}'e^{-2i\theta}, \quad n_1=\frac{c_0(1-\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha-2\beta},$$

$$n_2=ic_0(1+\beta), \quad c_0=\frac{c}{2\pi a}, \quad c=\frac{\mu_1\mu_2(1+\lambda)}{\mu_1+\kappa_1\mu_2},$$

причому α і β є параметри Дундурса [8].

Комплексне рівняння (5) являє собою систему двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно $\upsilon_r(\gamma)$ і $\upsilon_\theta(\gamma)$. Крім того, невідомими для $\theta\in\Omega_k$ є також $N(\theta)$ і $S(\theta)$, де Ω_k – множина точок контакту берегів тріщини.

На основі (2) та (4) умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини можна записати у вигляді

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\left[\upsilon_r(\theta)\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}-\upsilon_\theta(\theta)\begin{Bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{Bmatrix}\right]d\theta=0. \quad (6)$$

Розкриття тріщини характеризується наступними стрибками переміщень

$$\Delta_x=u_1^+-u_1^-, \quad \Delta_y=u_2^+-u_2^-,$$

$$\Delta_r=u_r^+-u_r^-, \quad \Delta_\theta=u_\theta^+-u_\theta^-.$$

Це розкриття через невідомі функції системи (5) можна записати у вигляді

$$\Delta_r(\theta)+i\Delta_\theta(\theta)=\int_{-\beta_0}^{\theta}e^{i(\gamma-\theta)}\left\{\upsilon_r(\gamma)+i\upsilon_\theta(\gamma)\right\}d\gamma,$$

$$\theta\in(-\beta_0,\beta_0). \quad (7)$$

4. Тріщина в однорідному матеріалі

Розглянемо частковий випадок поставленої задачі, коли матеріали матриці S_+ та включення

S_- однакові. У цьому випадку $\mu_1=\mu_2=\mu$, $\kappa_1==\kappa_2=\kappa$, $\alpha=\beta=0$, $c=2\mu/(1+\kappa)$. Припустимо також, що тертя між берегами тріщини в зоні контакту відсутнє. Тоді рівняння (5) після відокремлення дійсної та уявної частини приймає вигляд наступної системи рівнянь:

$$c_0\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\mathrm{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right)\upsilon_r(\gamma)d\gamma=\frac{c}{\pi a}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\upsilon_\theta(\gamma)d\gamma+N(\theta)-R_1(\theta),$$

$$c_0\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\mathrm{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right)\upsilon_\theta(\gamma)d\gamma=-R_2(\theta),\quad |\theta|<\beta_0. \quad (8)$$

де

$$R_1(\theta)=\frac{T}{2}\{1+\cos2(\omega-\theta)\},\quad R_2(\theta)=\frac{T}{2}\sin2(\omega-\theta).$$

Цю систему рівнянь як і у випадку неоднорідного матеріалу треба розв'язувати за умови однозначності переміщень (6) та додаткові умови в області контакту. Напруження поза тріщиною можна записати у вигляді

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}(t)\\ \sigma_{r\theta}(t)\end{Bmatrix}=c_0\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\mathrm{ctg}\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right)\begin{Bmatrix}\upsilon_r(\gamma)\\ \upsilon_\theta(\gamma)\end{Bmatrix}d\gamma-$$

$$-\frac{c}{\pi a}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\begin{Bmatrix}\upsilon_\theta(\gamma)\\ 0\end{Bmatrix}d\gamma+\begin{Bmatrix}R_1(\theta)\\ R_2(\theta)\end{Bmatrix},\quad \theta\notin(-\beta_0,\beta_0). \quad (9)$$

Для чисельного розв'язання системи рівнянь (8) введемо наступну заміну координат:

$$\tau=\frac{\mathrm{tg}(\theta/2)}{\mathrm{tg}(\beta_0/2)},\quad s=\frac{\mathrm{tg}(\gamma/2)}{\mathrm{tg}(\beta_0/2)}. \quad (10)$$

Тоді рівняння (8) приймають вигляд

$$\int_{-1}^{1}\frac{B_1(s)}{s-\tau}ds=\eta^2\int_{-1}^{1}\frac{sB_1(s)}{g(s)}ds+2\eta\int_{-1}^{1}\frac{B_2(s)}{g(s)}ds+$$

$$+\hat{R}_1(\tau)+\hat{N}(\tau),$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{B_2(s)}{s-\tau}ds=\eta^2\int_{-1}^{1}\frac{sB_2(s)}{g(s)}ds+\hat{R}_2(\tau), \quad (11)$$

де

$$\tau\in(-1,1),\quad \hat{R}_i(\tau)=R_i[\theta(\tau)],\quad i=1,2,$$

$$g(s)=1+\eta^2s^2,\quad \eta=\mathrm{tg}\frac{\beta_0}{2},\quad \upsilon_r(\theta)=\frac{a}{\tilde{c}}B_1(s),$$

$$\upsilon_\theta(\theta)=\frac{a}{\tilde{c}}B_2(s),\quad \hat{N}(s)=N[\gamma(s)],\quad \tilde{c}=\frac{c}{\pi}.$$

Умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини (6) записуються так:

$$\int_{-1}^{1}g^{-2}(s)\left\{(1-\eta^2s^2)B_1(s)-2\eta sB_2(s)\right\}ds=0,$$

$$\int_{-1}^{1}g^{-2}(s)\left\{2\eta sB_1(s)+(1-\eta^2s^2)B_2(s)\right\}ds=0. \quad (12)$$

Умова рівності нулю відкриття тріщини в зоні контакту на основі (7) приймає вигляд

$$\int_{-1}^{\tau}\frac{2\eta}{g(s)}\{B_1(s)\cos[\psi(s,\tau)]-$$

$$-B_2(s)\sin[\psi(s,\tau)]\}ds=0,\quad \tau\in\Omega_k^*, \quad (13)$$

де

$$\psi(s,\tau)=2\,\mathrm{arctg}(\eta s)-2\,\mathrm{arctg}(\eta\tau).$$

Для розв'язання системи рівнянь (11) – (13) подамо невідомі функції у вигляді

$$B_1(s)=\frac{B_1^*(s)}{\sqrt{1-s^2}},\quad B_2(s)=\frac{B_2^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (14)$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (11) – (13), розглядаючи їх у точках $\tau_i=\cos(i\pi/n)$ і застосовуючи квадратурні формули Гауса – Чебишева у вузлах $s_j=\cos((2j-1)\pi/(2n))$ отримуємо систему $2n+m$ алгебричних рівнянь відносно невідомих $B_1^*(s_j)$, $B_2^*(s_j)$, $\hat{N}(\tau_k)$ ($j=1,2,\ldots,n$; $i=1,2,\ldots,n-1$; $k=1,2,\ldots,m$; $m<n$).

5. Результати та їх аналіз

Припустимо, що матеріал однорідний з характеристиками μ, κ. Для кожного кута нахилу зовнішнього навантаження ω слід знаходити таку зону контакту Ω_k, при якій виконуються співвідношення (13). Це можна здійснити шляхом розв'язання дискретизованої системи рівнянь (11) – (13) методом послідовних наближень за різних Ω_k.

В даному випадку реалізувалась обернена процедура, а саме: вибиралось Ω_k і шляхом послідовного розв'язання дискретизованої системи рівнянь (11) – (13) підбирався такий кут нахилу зовнішнього навантаження ω, при якому напруження σ_{rr} в Ω_k є недодатними, а розкриття в іншій частині тріщини – невід'ємним. Конкретним критерієм слугувало таке значення ω, при незначній варіації якого змінювався знак $\hat{N}(\tau_m)$.

На рис. 1 наведено графіки розкриття тріщини $\tilde{\Delta}_r(\theta)=[5\mu/(Ta)]\Delta_r(\theta)$ на проміжку $(-\beta_0,\beta_0)$ для $\omega_1=0{,}57917$, $\omega_2=1{,}17917$ і $\beta_0=\pi/3$.

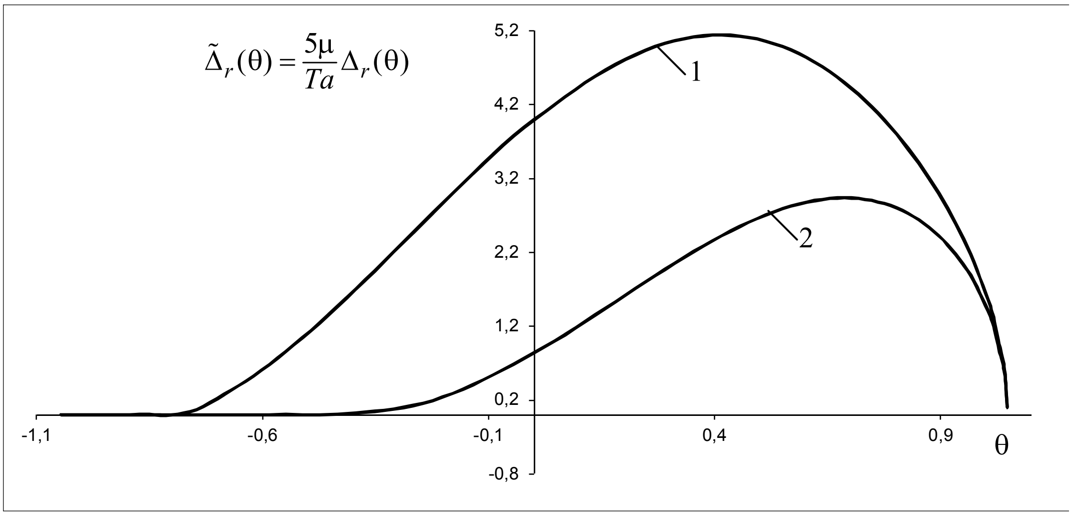

Рис. 1. Стрибок радіальних переміщень берегів тріщини

6. Висновки

Досліджена дугова тріщина, що розташована між круговим включенням та нескінченною матрицею з різними механічними властивостями. На нескінченності в довільному напрямку діє рівномірне розтягуюче навантаження. Сформульована нелінійна система сингулярних рівнянь (5) з відповідними додатковими умовами відносно функцій, які характеризують розкриття тріщини. Ця система розв'язувалась чисельно з використанням процедури послідовних наближень та квадратурної формули Гауса – Чебишева. Для часткового випадку однорідного матеріалу наведені результати розрахунку довжини зони контакту берегів тріщини та її розкриття в залежності від кута нахилу зовнішнього навантаження.

Список використаних джерел

1. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – V. **44**. – P. 631-636.
2. *Simonov I. V.* Interface crack in homogeneous stress field. // Mechanics of composite materials. – 1985. – No 6. – P. 969-976. (in Russian).
3. *Ostrik V. I., Ulitko A. F.* A crack on the interface of two dissimilar half-planes // Math. Methods and Phis.-Mech. Fields. – 2000. – V. **43**, No 2. – P. 119-126. (in Ukrainian).
4. *Chao R.*, *Laws N.* Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1992. – V. **45**. – P. 629-640.
5. *Chao R.*, *Laws N.* The fiber-matrix interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – V. **64**. – P. 992-999.
6. *Ulitko A. F., Ostrik V. I.* Interface crack on the board of division of circular inclusion and matrix // Physically-Math. Modeling and Information Technologies. – 2006. – No 3. – P. 138-149. (in Ukrainian).
7. *Muskhelishvili N. I.* Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity. – Noordhoff, Groningen, 1963.
8. *Dundurs J.* Discussion // Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME, Series E. – 1969. – V. **36**. – P. 650-652.

Надійшла до редколегії 31.03.13