

УДК 539.3

Мартиненко М. А.¹, д. ф.-м. н., проф.

Аналітичний аналіз напружено-деформованого стану в тілі з циліндричною тріщиною

Знайдено аналітичні формули для полів напружень і переміщень в довільній точці пружного середовища з циліндричною тріщиною. Отримано вирази для знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень, а також проаналізовано локальне поле напружень і переміщень в околі тріщини.

Ключові слова: коефіцієнти інтенсивності напружень, локальне фізичне поле.

¹ Національний університет харчових технологій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

Дослідження полів переміщень і напружень в тілі з циліндричною тріщиною є ключовою задачею при оцінці міцності та надійності конструкцій, ослаблених такими дефектами, методами механіки руйнування. Ця задача потребує значно більше аналітичних досліджень, ніж зведення проблеми до системи інтегральних рівнянь Фредгольма.

На підставі рівностей (4), (12) із [1] вирази для проєкцій вектора зусиль \overline{F}_n на поверхні циліндра поза розрізом запишемо у вигляді

$$R_p = \int_0^{\infty} [a_{11}(\lambda)S_1 + a_{12}(\lambda)S_2] \lambda \cos \lambda \xi d\lambda \quad (\xi > 1);$$
$$Z_p = \int_0^{\infty} [a_{21}(\lambda)S_1 + a_{22}(\lambda)S_2] \lambda \sin \lambda \xi d\lambda, \quad (1)$$

де $a_{ij}(\lambda)$ знаходяться з формул (14) [1].

Безпосередній розрахунок зусиль на поверхні циліндра поза розрізом неможливий, так як асимптотичний аналіз невластних інтегралів (1) показує, що в точці $\xi = 1$ зусилля мають кореневу особливість. Якщо скористатися інтегральним представленням [1]

M. A. Martynenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.

Analytical analysis of the stress-strain state of a cylindrical body with a crack

The analytical formulas for the fields of stresses and displacements at an arbitrary point of an elastic medium with a cylindrical crack were obtained. The expressions for the stress intensity factors were constructed. The local fields of stresses and displacements in the vicinity of the crack were analyzed.

Key Words: intensity factors and stresses, local physical field.

¹ National University of Food Technologies, 68, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

$$\sin \tau z = \tau \int_0^z \frac{x J_0(\tau x) dx}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

тригонометричних функцій і поміняти порядки інтегрування, то прийдемо до інтегральних рівнянь Абеля такого вигляду:

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{\xi - x^2}} \left\{ \int_0^1 \varphi(t) \left[\int_0^{\infty} L_{ij} J_0(\tau t) J_0(\tau x) dx \right] \right\} dt = F(\xi).$$

Так як точка $\xi = 1$ є особливою точкою, то зовнішній інтеграл будемо знаходити з граничної рівності

$$\int_0^{\xi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\xi} \right\}.$$

Після низки перетворень отримано такі вирази для зусиль на поверхні циліндра поза розрізом ($\xi > 1$):

$$R_p = -\frac{1}{2} \frac{\xi \varphi(1)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\xi [\Phi_1(x) x^{-1}] dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + \int_1^{\xi} \frac{\xi dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \frac{d}{dx} \times$$
$$\times \left\{ \int_0^1 [\varphi(t) K_{11}(t, x) + \psi(t) K_{12}(t, x)] x^{-1} dx \right\} + C,$$

$$Z_p = \frac{1}{2} \frac{\psi(1)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\Phi'_2(x) dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + \int_1^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \times \left\{ \int_0^1 [\varphi(t)K_{21}(t, x) + \psi(t)K_{22}(t, x)] dt \right\}. \quad (2)$$

Формули (2) характерні тим, що особливість напружень зосереджена в перших доданках, а інші складові є регулярними. Це дає можливість знайти коефіцієнти інтенсивності напружень із граничних рівностей [2]

$$k_1 = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \sigma_p \Big|_{s=s_0} \sqrt{2l_0} = -\frac{1}{2} \varphi(1) \sqrt{z_0},$$

$$k_2 = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \sigma_{zp} \Big|_{s=s_0} \sqrt{2l_0} = \frac{1}{2} \psi(1) \sqrt{z_0}. \quad (3)$$

де l_0 – найкоротша відстань від точки на поверхні циліндра до граничного кола розрізу.

Складові поля переміщень, наприклад, в довільній точці зовнішньої області ($s > s_0$) запишуться через інтегральні оператори (10) із [1] у вигляді

$$2Gu_\rho^{(2)}(s, \xi) = z_0 \int_0^\infty [\beta_{11}S_1 + \beta_{12}S_2] \cos \lambda \xi d\lambda,$$

$$2Gu_z^{(2)}(s, \xi) = z_0 \int_0^\infty [\beta_{21}S_1 + \beta_{22}S_2] \sin \lambda \xi d\lambda, \quad (4)$$

де

$$\beta_{11} = as_0 K_0 I_0 + \frac{3m-2}{m} \lambda s_0 I_0 K_1 - \lambda s K_0 I_1 - \left(4 \frac{m-1}{m} + \lambda^2 s_0^2 \right) I_1 K_1,$$

$$\beta_{12} = 2 \frac{m-1}{m} \lambda s_0 I_1 K_1 + \lambda^2 s s_0 I_1 K_0 - \lambda^2 s_0^2 I_0 K_1,$$

$$\beta_{21} = \lambda^2 s s_0 I_0 K_1 - \lambda^2 s_0^2 K_0 I_1 - \lambda s I_1 K_1 - \frac{m-2}{m} \lambda s_0 I_0 K_0,$$

$$\beta_{22} = \lambda s_0 \left(\lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 - 2 \frac{m-1}{m} I_1 K_0 \right). \quad (5)$$

Зауважимо, що в рівностях (5) функції I_n залежать від аргументу λs_0 , а функції Макдональда K_n – від λs ($s > s_0$).

Для дослідження (4) в околі граничного кола циліндричного розрізу необхідно знайти асимптотику виразів (5) при $\lambda \gg 1$. Після низки перетворень отримаємо

$$\beta_{11} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) + 2 \frac{m-1}{m} \right] = \overline{\beta_{11}},$$

$$\beta_{12} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) + \frac{m-2}{m} \right] = \overline{\beta_{12}},$$

$$\beta_{21} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) - \frac{m-2}{m} \right] = \overline{\beta_{21}},$$

$$\beta_{22} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \left[\lambda(s-s_0) - 2 \frac{m-1}{m} \right] = \overline{\beta_{22}}. \quad (6)$$

Якщо додати і відняти під знаками інтегралів вирази $\overline{\beta_{ij}}$ (6), то після відповідного аналізу доказано, що інтеграли вигляду

$$\int_0^\infty (\beta_{ij} - \overline{\beta_{ij}}) S_{1,2} \sin \lambda \xi d\lambda \quad (7)$$

в околі точки $(s_0, 1)$ мають порядок $O(r^p)$ ($p > 1$) і є регулярними.

Проведемо асимптотичне інтегрування не-власних інтегралів (4) при s, ξ близьких до $s_0, 1$. Для цього введемо локальну полярну систему координат r, γ так, як показано на рис. 1.

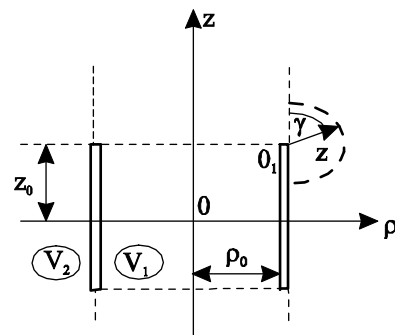


Рис. 1

Якщо в табличних інтегралах [3]

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(tx) x^{-1} dx = \left(\sqrt{\alpha^2 + t^2} - \alpha \right)^\nu (vt)^{-1} \quad (\text{Re } \nu > 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(tx) x^{-1} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} \left(\sqrt{\alpha^2 + t^2} - \alpha \right)^\nu \quad (\text{Re } \nu > -1, \text{Re } \alpha > 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_1(tx) x dx = t \left(\alpha^2 + t^2 \right)^{-3/2} \quad (\text{Re } \alpha > 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0(tx) x dx = \alpha \left(\alpha^2 + t^2 \right)^{-3/2} \quad (\text{Re } \alpha > 0)$$

покласти

$$\alpha = s - s_0 + i\xi, \quad t = 1, \quad \xi \approx 1, \quad s \approx s_0,$$

то після ряду перетворень отримаємо наближені значення інтегралів такого типу

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau(s-s_0+i\xi)} J_0(\tau) \tau^{-1} d\tau \approx -\sqrt{2r} e^{i\gamma/2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau(s-s_0+i\xi)} J_1(\tau) d\tau \approx -(2r)^{-1/2} e^{-i\gamma/2}. \quad (8)$$

На їх підставі проводиться асимптотичне інтегрування виразів

$$\int_0^{\infty} \overline{\beta_{ij}} S_{1,2} \sin \lambda \xi d\lambda.$$

Після низки громіздких перетворень локальне поле переміщень записується у вигляді

$$2Gu_p^{(2)} \approx \sqrt{2r} \left\{ k_1 \left(2 \frac{m-1}{m} \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + k_2 \left(\frac{1}{2} \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{m-2}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \right\},$$

$$2Gu_z^{(2)} \approx \sqrt{2r} \left\{ k_1 \left(\frac{1}{2} \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{m-2}{m} \cos \frac{\gamma}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + k_2 \left(\frac{1}{2} \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \frac{m-1}{m} \sin \frac{\gamma}{2} \right) \right\}. \quad (9)$$

Здійснюючи перехід до полярних складових вектора переміщень, отримаємо

$$2Gu_r^{(2)} \approx \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}} \left\{ k_1 \left[(2k-1) \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{3\gamma}{2} \right] - \right.$$

$$\left. - k_2 \left[(2k-1) \sin \frac{\gamma}{2} - 3 \sin \frac{3\gamma}{2} \right] \right\},$$

$$2Gu_\gamma^{(2)} \approx \frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{2}} \left\{ k_1 \left[-(2k+1) \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{3\gamma}{2} \right] - \right.$$

$$\left. - k_2 \left[(2k+1) \cos \frac{\gamma}{2} - 3 \cos \frac{3\gamma}{2} \right] \right\}, \quad (10)$$

де $k = (3m-4)/m$, а k_1, k_2 визначаються формулами (3).

На підставі формул (4), (12) із [1] показано, що компоненти тензора напружень в довільній точці зовнішньої області V_2 ($s > s_0$) визначаються інтегралами Фур'є

$$\sigma_{pp}^{(2)} = \int_0^{\infty} (A_{11}S_1 + A_{12}S_2) \lambda \cos \lambda \xi d\lambda,$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \int_0^{\infty} (A_{31}S_1 + A_{32}S_2) \lambda \cos \lambda \xi d\lambda,$$

$$\sigma_{pz}^{(2)} = \int_0^{\infty} (A_{21}S_1 + A_{22}S_2) \lambda \sin \lambda \xi d\lambda, \quad (11)$$

де

$$A_{11} = 2\lambda s_0 I_0 K_0 - \left(4 \frac{m-1}{\lambda s m} + \lambda s + \lambda s_0^2 s^{-1} \right) I_1 K_1 +$$

$$+ \frac{3m-2}{m} (s_0 s^{-1} I_0 K_1 - I_1 K_0) + \lambda^2 s_0 (s I_0 K_1 - s_0 I_1 K_0),$$

$$A_{12} = \lambda s_0 \times$$

$$\times \left(I_1 K_0 - \frac{s_0}{s} I_0 K_1 + \lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 + 2 \frac{m-1}{m} \frac{I_1 K_1}{\lambda s} \right),$$

$$A_{21} = \lambda s I_1 K_0 - \lambda s_0 I_0 K_1 +$$

$$+ \lambda^2 s_0 (s_0 I_1 K_1 - s I_0 K_0) + 2 \frac{m-1}{m} I_1 K_1,$$

$$A_{22} = \lambda^2 s_0 (s_0 I_0 K_1 - s I_1 K_0),$$

$$A_{31} = \frac{2}{m} K_0 I_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 +$$

$$+ \lambda^2 s (s K_1 I_0 - s_0 K_0 I_1) - \lambda s K_1 I_1,$$

$$A_{32} = \lambda s_0 [\lambda s I_1 K_1 - \lambda s_0 I_0 K_0 - 2 I_1 K_1]. \quad (12)$$

У формулах (12) функції Макдональда і Бесселя залежать відповідно від аргументів λs і λs_0 .

Асимптотичний аналіз виразів A_{ij} дає наближення такого вигляду:

$$A_{11} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} [\lambda(s-s_0) + 1] = \overline{A_{11}},$$

$$A_{12} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \lambda(s-s_0) = \overline{A_{12}},$$

$$A_{21} \approx -\frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} \lambda(s-s_0) = \overline{A_{21}},$$

$$A_{22} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} [1 - \lambda(s-s_0)] = \overline{A_{22}}, \quad (13)$$

$$A_{31} \approx -\overline{A_{22}}; \quad A_{32} \approx \frac{1}{2} e^{-\lambda(s-s_0)} [\lambda(s-s_0) - 2] = \overline{A_{32}}.$$

Саме ці складові і визначають особливості полів напружень в околі граничного кола циліндричного розрізу. Якщо інтеграли S_1, S_2 проінтегрувати частинами, то їх перше наближення матиме вигляд

$$\int_0^1 \varphi(\tau) J_1(\tau t) d\tau \approx -\frac{1}{\tau} \varphi(1) J_0(\tau) + \dots$$

Наступний доданок при інтегруванні особливостей не дає.

Після низки перетворень складові тензора напружень в полярній системі координат були отримані у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times \\ &\times \left[k_1(3 - \cos\gamma) \cos \frac{\gamma}{2} + k_2(3 \cos\gamma - 1) \sin \frac{\gamma}{2} \right] + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_{\gamma\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times \\ &\times \left[k_1(1 + \cos\gamma) \cos \frac{\gamma}{2} - 3k_2 \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right] + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_{r\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2r}} \times \\ &\times \left[k_1 \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + k_2(3 \cos\gamma - 1) \cos \frac{\gamma}{2} \right] + O(\sqrt{r}).\end{aligned}\quad (14)$$

Формули (10), (14) мають місце в областях V_1 і V_2 .

Аналіз (10), (14) показує, що в околі граничного кола циліндричного розрізу поля напружень і переміщень відповідають стану плоскої деформації, і, як показано в [4], це твердження має місце для просторової тріщини довільної геомет-

рії. Цей висновок співпадає з відомим класичним результатом, отриманим Снеддоном [5] при аналізі локального напружено-деформованого стану в околі монетоподібної тріщини.

Від постановки задачі до отримання асимптотичних формул (10), (14) необхідно було виконати не одну сотню аналітичних перетворень. Найменша похибка методичного характеру або алгебраїчного характеру на будь-якому з етапів перетворень обов'язково б привела до похибки в формулах (10), (14), а значить і до спотворення фізичної суті задачі. Тобто, локальні фізичні поля такого класу задач є найнадійнішим критерієм достовірності методів аналітичного розв'язання від постановки задачі до кінцевих результатів.

Числові результати отримані для найбільш розповсюдженого на практиці випадку, коли пружний простір знаходиться під радіальними рівномірними зусиллями.

Показано, що із двох розрізів однакової площі, той розріз буде більш небезпечним у якого параметр $s_0' > s_0''$.

Список використаних джерел

1. *Martynenko M. A.* The first major problem on the theory of elasticity for a body with a cylindrical crack // Bulletin of Kyiv University. Ser.: Phys.-Math. Sci. – 2013. – No 3. (in Ukrainian).
2. *Panasiuk V.* The limit equilibrium of elastic bodies with cracks – Kyiv: Naukova dumka, 1968. – 246 p. (in Russian).
3. *Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev S. I.* Integrals and series. Special Functions– Moscow: Nauka, 1983. – 752 p. (in Russian).
4. *Martynenko M. A.* Mixed spatial problems of mathematical theory of elasticity: monograph. – Kyiv, 2012. – 376 p. (in Ukrainian).
5. *Sneddon I.* Fourier transformation. – Moscow: IL, 1966. – 667 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 20.05.13