

УДК 539.3

Маципура В. Т.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Вовк І. В.², д. ф.-м. н., проф.,
Трунов О. О.¹, аспірант

Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі

У статті розглянуто поширення звукової хвилі в криволінійному хвилеводі. Визначені дисперсійні співвідношення для хвилеводу з жорсткими і м'якими межами. Побудовані частотні залежності фазових та групових швидкостей мод криволінійного хвилеводу. Проведено порівняльний аналіз власних форм криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів.

Ключові слова: криволінійний хвилевід, структура мод, дисперсійні криві.

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е
e-mail: mnivtt@gmail.com,
trunov.olexandr@gmail.com

² Інститут гідромеханіки НАН України,
03057, м. Київ, вул. Желябова, 8/4

Вступ

Розглянемо плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 1. До криволінійної ділянки примикають плоскопаралельні хвилеводи. Оскільки такі структури часто зустрічаються в конструкціях акустичних і електромагнітних хвилеводів, то інтерес до дослідження хвильового поля в них не слабшає (див., наприклад, [1, 2]).

Для опису геометрії хвилеводу і подальшої побудови розв'язку задачі поширення гармонічної хвилі в такому хвилеводі введемо три системи координат: дві декартові (x, y) , (x', y') і полярну (r, φ) з загальним центром у точці O . Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 та r_2 . Ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою і дорівнює $h = r_2 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як φ_0 . Всі поверхні хвилеводу будемо вважати або акустично жорсткими, або акустично м'якими. Хвилевід наповнений ідеальною рідиною, яка має густину ρ та швидкість звуку c . Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

V. T. Matsipura¹, Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.,
I. V. Vovk², Dr. Sci. (Phys.-Math), Prof.,
O. O. Trunov¹, PhD student

Wave propagation in the bent waveguide

The sound wave propagation in the bent waveguide was considered. The dispersion curves in the waveguide with hard and soft boundary were determined. Frequency and phase relationships of modes in the bent waveguide were constructed. The comparative analysis of modes in the bent waveguide and in straight waveguides was done.

Key Words: bent waveguide, wave mod structure, dispersion curves.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: mnivtt@gmail.com,
trunov.olexandr@gmail.com

² Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabova st., 8/4

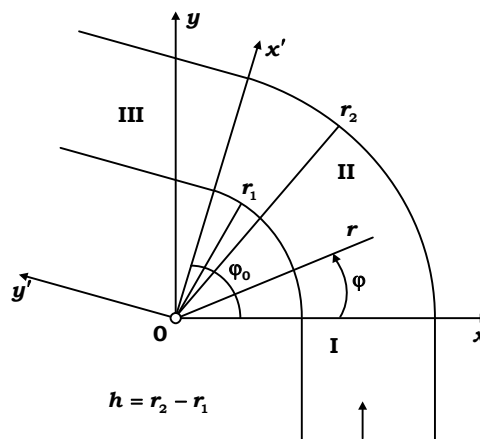


Рис. 1. Геометрія хвилеводу

Метод розв'язання

Природнім чином вся область існування звукового поля розбивається на три області: області I та III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу з криволінійними поверхнями. Нехай в області I в додатному напрямку осі Oy поширюється m -та мода плоскопаралельного

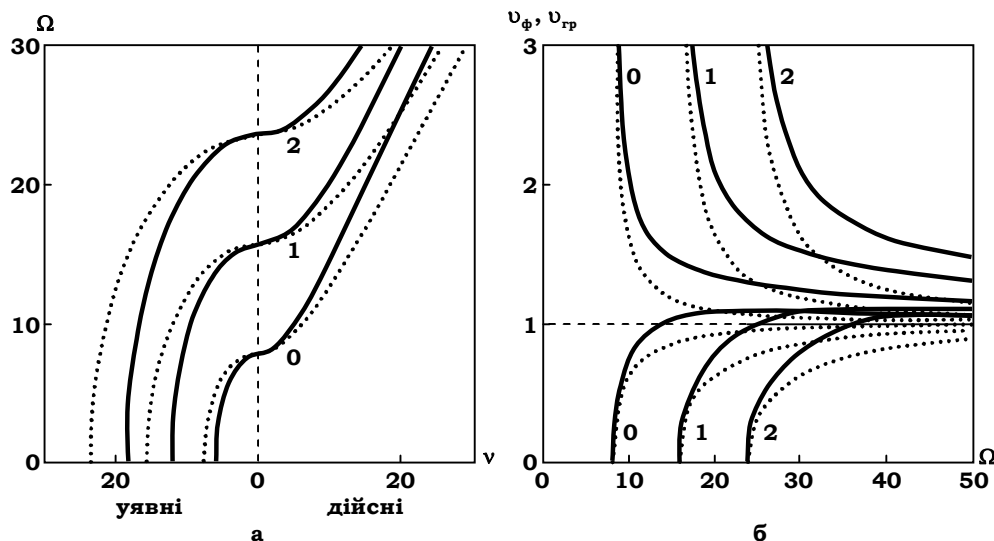


Рис. 2. Дисперсійні криві (а) та частотні залежності фазових (верхня група кривих) і групових (нижня група кривих) швидкостей (б) для криволінійного хвилеводу з акустично м'якими межами, $q = 0,6$

хвилеводу. Тоді поля в областях I і III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу. Для хвилеводу з акустично жорсткими поверхнями поля мають вигляд

$$p_I = \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(i\gamma_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(-i\gamma_n y), \quad (1)$$

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n(x' - r_1)) \exp(i\gamma_n y'), \quad (2)$$

де

$$\alpha_n = n\pi/h, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}, \quad k = \omega/c.$$

Для хвилеводу з акустично м'якими межами у формулах (1), (2) функції косинуса, що визначають власні форми мод, замінюються на функції $\sin(\alpha_n(x - r_1))$, де $\alpha_n = (n+1)\pi/h$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Перед тим як записати поле в області II визначимо вираз для нормальних хвиль криволінійної частини хвилеводу. Частковий розв'язок рівняння Гельмгольца в полярних координатах для області II має вигляд (див. [3])

$$p = [J_\nu(kr) + E_\nu Y_\nu(kr)] \exp(i\nu\varphi), \quad (3)$$

де $J_\nu(kr)$ і $Y_\nu(kr)$ – функції Бесселя і Неймана ν -го порядку, E_ν і ν – довільні сталі.

Використовуючи граничні умови на жорстких поверхнях області II ($\partial p / \partial r = 0$ при $r = r_1$ і $r = r_2$), визначаємо сталу $E_\nu = -J'_\nu(kr_2) / Y'_\nu(kr_2)$ та приходимо до дисперсійного рівняння, яке встановлює

зв'язок між частотою $\omega = kc$ та сталою поширення ν :

$$J'_\nu(kr_2) Y'_\nu(kr_1) - J'_\nu(kr_1) Y'_\nu(kr_2) = 0. \quad (4)$$

Штрих означає похідну по аргументу.

Аналогічно, використовуючи граничні умови на м'яких поверхнях області II ($p = 0$ при $r = r_1$ і $r = r_2$), визначаємо константу $E_\nu = -J_\nu(kr_2) / Y_\nu(kr_2)$ і приходимо до такого дисперсійного рівняння:

$$J_\nu(kr_2) Y_\nu(kr_1) - J_\nu(kr_1) Y_\nu(kr_2) = 0. \quad (5)$$

На рис. 2, а побудовано дисперсійні криві для акустично м'яких поверхонь хвилеводу, а на рис. 3, а – для хвилеводу з жорсткими стінками. Вздовж осі ординат відкладемо безрозмірну частоту $\Omega = kr_2 = \omega r_2 / c$, вздовж осі абсцис – сталу поширення ν . Радіус $r_1 = r_2 q$, де стала $q < 1$ (в даному випадку $q = 0,6$). Точкові криві відповідають плоскому хвилеводу з тим самим, що і у криволінійного хвилеводу, поперечним розміром. Цифри поблизу кривих визначають номер нормальної хвилі. Як бачимо, якщо критичні частоти мод криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів з графічною точністю співпадають, то подальший хід кривих відрізняється. Природно цей факт знаходить своє відображення при побудові частотних залежностей фазових та групових швидкостей нормальних хвиль (рис. 2, б; 3, б).

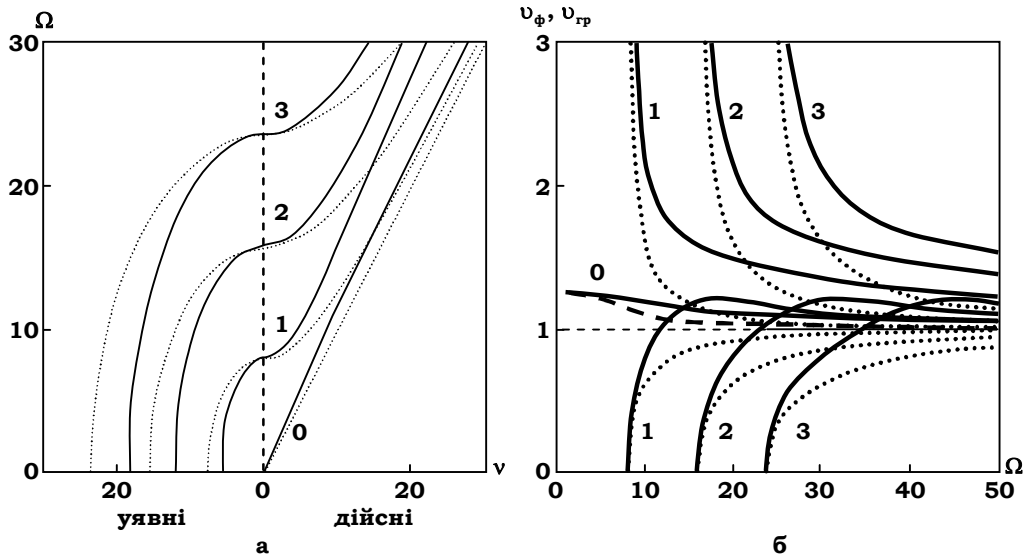


Рис. 3. Розрахунки для акустично жорсткого хвильоводу

Провівши на рис. 2, а чи рис. 3, а горизонтальну пряму, яка відповідає заданому значенню частоти, визначаємо тим самим скінченне число однорідних і нескінченне число неоднорідних нормальних хвиль. Їх суперпозиція дозволить описати довільне поле в криволінійній частині хвильоводу.

Таким чином, n -ту моду хвильоводу можна продати у вигляді

$$p_n = R_{v_n}(kr) \exp(iv_n \varphi), \quad (6)$$

де власні форми мод для акустично жорсткого хвильоводу записуються як

$$R_{v_n}(kr) = J_{v_n}(kr) - \frac{J'_{v_n}(kr_2)}{Y'_{v_n}(kr_2)} Y_{v_n}(kr), \quad (7)$$

а для акустично м'якого хвильоводу

$$R_{v_n}(kr) = J_{v_n}(kr) - \frac{J_{v_n}(kr_2)}{Y_{v_n}(kr_2)} Y_{v_n}(kr). \quad (8)$$

Як приклад, на рис. 4 (м'які стінки) і рис. 5 (жорсткі стінки) показано профілі розподілу тиску в радіальному перерізі криволінійного хвильоводу для однорідних і перших неоднорідних мод при $\Omega = kr_2 = 27$ і $q = 0,6$. Точкові криві визначають власні форми плоского хвильоводу з тією ж хвильовою шириною, що і у криволінійного хвильоводу. Як бачимо, власні форми перших мод зазначених хвильоводів істотно відрізняються.

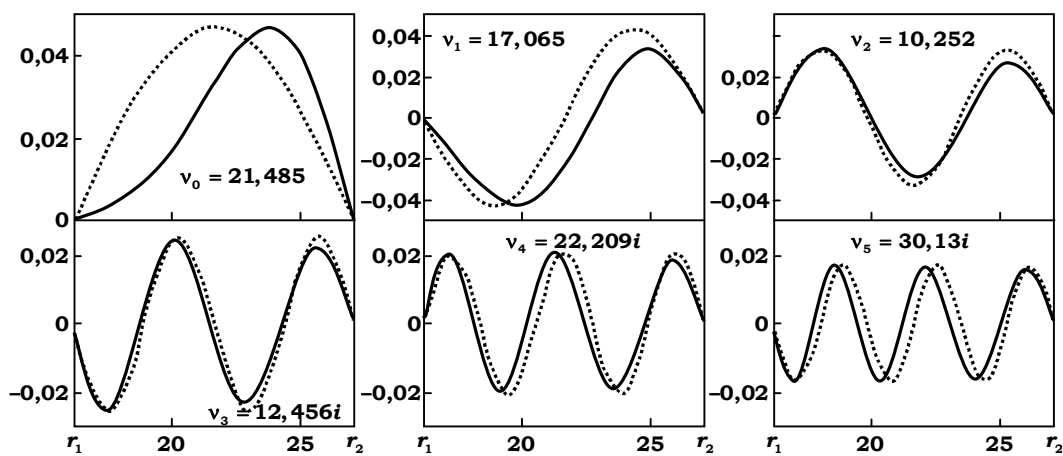


Рис. 4. Розподілу тиску в радіальному перерізі криволінійного хвильоводу з м'якими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод

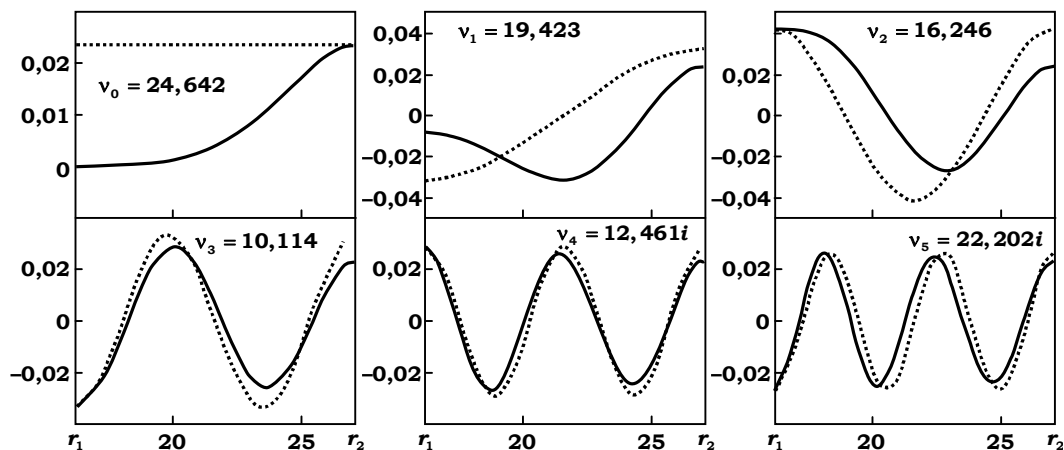


Рис. 5. Розподіл тиску в радіальному перерізі криволінійного хвильоводу з жорсткими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод

Отже, поле в області II запишемо у вигляді

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{v_n}(kr) [B_n \exp(iv_n \varphi) + C_n \exp(iv_n(\varphi - \varphi_0))]. \quad (9)$$

Для розв'язання задачі поширення хвилі у хвильоводі слід розписати умови спряження звукових полів на межах часткових областей і скористатися властивістю ортогональності набору функцій $\cos(\alpha_n(x - r_1))$, $x \in [r_1, r_2]$ та $R_{v_n}(kr)$, $r \in [r_1, r_2]$.

Висновки

В роботі побудовано розв'язок задачі поширення звукових хвиль у криволінійному хвильоводі як для випадку ідеально м'яких меж, так і для ідеально жорстких. Визначені дисперсійні співвідношення і побудовано дисперсійні криві для криволінійної області. Це дало можливість визначити частотні залежності фазових та групових швидкостей мод криволінійного хвильоводу.

Також побудовано розподіл тиску в радіальному перерізі криволінійного хвильоводу з жорсткими і м'якими поверхнями для однорідних і перших неоднорідних мод. Проведено порівняльний аналіз з модами плоскопаралельного хвильоводу відповідної ширини. Встановлено, що власні форми однорідних мод (особливо перших номерів) криволінійного і плоскопаралельного хвильоводів можуть суттєво відрізнятись.

Список використаних джерел

1. Cochran J. A., Pecina R. G. Mode propagation in continuously curved waveguides. – Radio science, 1966. – 34. – P. 679-696
2. Horvat M., Prosen T. The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2007. – 1. – 34 p.
3. Rzhavkin S. N. Course of lectures on theory of a sound. – Moscow: MGH, 1960. – 336 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 13.05.13