

УДК 534.143-8

Петрищев О. Н.¹, д. т. н., проф.,
Михеева А. Н.¹, студентка

Об одном способе решения задачи Лэмба

Предлагается схема решения осесимметричной задачи Лэмба для невзаимодействующих продольных и сдвиговых волн, которые уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства.

Ключевые слова: суперпозиция, сферическая система координат, потенциалы смещений.

¹ Национальный технический университет Украины «КПИ», 03056, г. Киев, просп. Победы, 37
e-mail: petrishchev@ukr.net,
anastacia.mikheeva@gmail.com

Введение

Известно [1], что при динамическом нагружении конечной области поверхности упругого полупространства в нем возбуждаются взаимодействующие и невзаимодействующие продольные и поперечные (сдвиговые) волны. Взаимодействующие продольные и поперечные волны порождают поверхностную волну Рэлея, которая распространяется в радиальных направлениях вдоль поверхности полупространства. Невзаимодействующие продольные и поперечные волны уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства. Определение компонентов векторов смещений в волне Рэлея и в невзаимодействующих продольных и поперечных волнах составляет основное содержание задачи, которая впервые была сформулирована Горацио Лэмбом в 1904 г. [2] и в настоящее время носит его имя.

Стремление удержать в общем решении задачи Лэмба оба типа продольных и поперечных волн заставляет привязываться к поверхности полупространства, т. е. использовать либо декартову, либо цилиндрическую систему координат. Решения уравнений движения элемента объема деформируемого твердого тела в этих системах координат требует, помимо интегрального преобразования по времени, выполнения интегральных преобразований по координатным осям. Выполнение обратных интегральных преобразований сопряжено с известными [1] математическими трудностями.

Поскольку в линейной теории упругости а priori предполагается выполнение принципа суперпозиции решений, постольку задачу Лэмба мож-

O. N. Petrishchev¹, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
A. N. Mikheeva¹, student

On a method of solving Lamb's problem

It is proposed scheme for solving Lamb's axisymmetric problem for non-interacting longitudinal and shear waves which carry energy of source of external forces in the amount of half-space.

Key Words: superposition, spherical coordinate system, potentials of the displacement.

¹ National technical university of Ukraine "KPI",
03056, Kyiv, Prospect Peremogy, 37
e-mail: petrishchev@ukr.net,
anastacia.mikheeva@gmail.com

но разделить на две частные задачи, а именно – на задачу для поверхностных волн Рэлея и задачу для невзаимодействующих продольных и поперечных волн. Задача Лэмба для волн Рэлея решается в цилиндрической системе координат с помощью интегральных преобразований Ханкеля. Задача Лэмба для невзаимодействующих продольных и поперечных волн решается в сферической системе координат без применения интегральных преобразований.

В настоящей статье предлагается методика решения задачи Лэмба для невзаимодействующих продольных и поперечных волн для случая, когда поверхностные плотности внешних сил обладают осевой симметрией.

Возбуждение сферических продольных и поперечных волн осесимметричными нагрузками

Рассмотрим изотропное упругое полупространство (рис. 1), на поверхности которого $\vartheta = \pi/2$ (ϑ – полярная угловая координата сферической системы координат r, ϕ, ϑ , которая сопряжена с правосторонней декартовой системой координат x_1, x_2, x_3 так, как это показано на рис. 1) в круге $r \leq R$ заданы внешние нагрузки $\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r)e^{i\omega t}$ и $\sigma_{\vartheta r}^*(r)e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота; t – время). Требуется найти амплитудное значение $\vec{u}(r, \vartheta)$ гармонически изменяющегося во времени вектора смещения материальных частиц полупространства в произвольной точке A при условии, что напряженное состояние полупро-

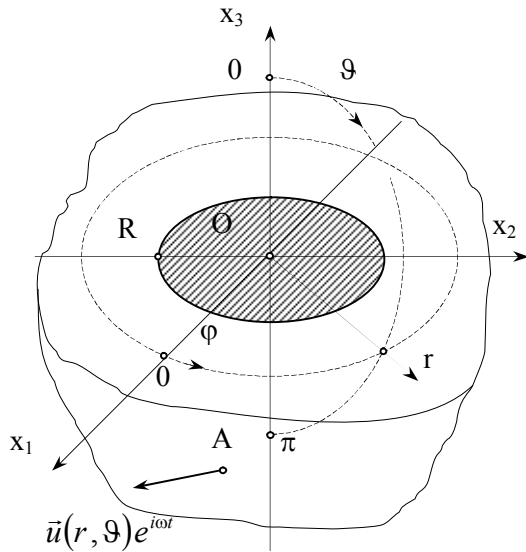


Рис. 1. Расчетная схема задачи Лэмба

странства на поверхности $\vartheta = \pi/2$ удовлетворяет третьему закону Ньютона, т. е.

$$\operatorname{Re} \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \pi/2) - \sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{\vartheta r}(r, \pi/2) - \sigma_{\vartheta r}^*(r) = 0, \quad (2)$$

где $\operatorname{Re} \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \pi/2)$ и $\operatorname{Re} \sigma_{\vartheta r}(r, \pi/2)$ – действительные части амплитудных значений упругих напряжений, которые возникают при динамическом деформировании полупространства.

Представим вектор смещения $\vec{u}(r, \vartheta)$ в виде суперпозиции следующих векторов

$$\vec{u}(r, \vartheta) = \vec{u}^\ell(r, \vartheta) + \vec{u}^s(r, \vartheta), \quad (3)$$

где $\vec{u}^\ell(r, \vartheta) = \operatorname{grad} \Phi(r, \vartheta)$ – вектор смещения в продольной волне; $\Phi(r, \vartheta)$ – скалярный потенциал; $\vec{u}^s(r, \vartheta) = \operatorname{rot} \vec{\Psi}(r, \vartheta)$ – вектор смещения в поперечной волне; $\vec{\Psi}(r, \vartheta)$ – векторный потенциал, который в случае осевой симметрии волнового поля полностью определяется азимутальным компонентом $\Psi_\phi(r, \vartheta)$, что автоматически обеспечивает выполнение условия $\operatorname{div} \vec{\Psi}(r, \vartheta) = 0$. Потенциалы перемещений удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(r, \vartheta) + k_\ell^2 \Phi(r, \vartheta) &= 0, \\ -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \Psi_\phi(r, \vartheta) + k_s^2 \Psi_\phi(r, \vartheta) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_\ell^2 = \omega^2/v_\ell^2$; $k_s^2 = \omega^2/v_s^2$; $v_\ell = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_0}$ и $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ – скорости распространения продоль-

ной (ℓ) и сдвиговой (s) волн; λ , G и ρ_0 – модули упругости и плотность материала полупространства.

Решения уравнений (4) выполняется по стандартной схеме разделения переменных и записывается в виде разложений по сферическим гармоникам

$$\Phi(r, \vartheta) = x_\ell^{-1/2} \sum_\nu B_\nu H_{\nu+1/2}^{(2)}(x_\ell) P_\nu(\xi), \quad (5)$$

$$\Psi_\phi(r, \vartheta) = -x_s^{-1/2} \sum_\mu C_\mu H_{\mu+1/2}^{(2)}(x_s) \frac{\partial P_\mu(\xi)}{\partial \vartheta}, \quad (6)$$

где $x_\beta = k_\beta r$ ($\beta = \ell, s$) – безразмерная радиальная координата; ν и μ – элементы ряда натуральных чисел; B_ν и C_μ – подлежащие определению константы; $H_{\lambda+1/2}^{(2)}(x_\beta)$ ($\lambda = \nu, \mu$) – функции Ханкеля второго рода; $P_\lambda(\xi)$ ($\xi = \cos \vartheta$) – функции Лежандра первого рода степени λ .

По известным потенциалам $\Phi(r, \vartheta)$ и $\Psi_\phi(r, \vartheta)$ определяются компоненты векторов смещения $u_\beta^\lambda(r, \vartheta)$, компоненты тензоров деформаций и напряжения $\sigma_{\vartheta\beta}^\lambda(r, \pi/2)$. Если значок $\nu = 2n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, то $\sigma_{\vartheta r}^\ell(r, \pi/2) = 0$, а нормальные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}^\ell(r, \pi/2) \neq 0$, причем граничное условие (1) можно записать в следующем виде

$$2k_\ell^2 x_\ell^{-1/2} G \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[a_1 J_{2n-3/2}(x_\ell) + a_2 J_{2n+1/2}(x_\ell) + a_3 J_{2n+5/2}(x_\ell) \right] P_{2n}(0) = \sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4n-1} + \frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n-1)}, \quad a_3 = \frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}, \\ a_2 &= \frac{1}{4n-1} + \frac{(2n+1)^2}{4n+1} \left(\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+3} \right) - \frac{\eta}{1-2\eta}; \end{aligned}$$

η – коэффициент Пуассона упругого полупространства; $J_{2n-3/2}(x_\ell)$, $J_{2n+1/2}(x_\ell)$, $J_{2n+5/2}(x_\ell)$ – функции Бесселя. Если значок $\mu = 2n+1$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, то $\sigma_{\vartheta\vartheta}^s(r, \pi/2) = 0$, а касательные напряжения $\sigma_{\vartheta r}^s(r, \pi/2) \neq 0$, причем граничное условие (2) можно записать в виде

$$G k_s^2 x_s^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n (2n+1) \left[\beta_1 J_{2n-1/2}(x_s) + \beta_2 J_{2n+3/2}(x_s) + \beta_3 J_{2n+7/2}(x_s) \right] P_{2n}(0) = \sigma_{\vartheta r}^*(r), \quad (8)$$

где

$$\beta_1 = \frac{4(2n+1)^2 + 7(2n+1) - 3}{2(4n+1)(4n+3)} - \frac{3}{2(4n+1)};$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \frac{4(2n+1)^2 + 7(2n+1) - 3}{2(4n+3)(4n+5)} - 1;$$

$$\beta_3 = \beta_1 + \frac{3}{2(4n+1)}.$$

Известен интеграл [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} J_{2m+1/2}(x) J_{2n+1/2}(x) dx = \begin{cases} 0 & \forall m \neq n, \\ 1/(2n+1) & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Умножая левую и правую части соотношения (7) на функцию

$$W_n^\ell(x_\ell) = x^{-1/2} \left[J_{2n-3/2}(x_\ell) + J_{2n+1/2}(x_\ell) + J_{2n+5/2}(x_\ell) \right],$$

и выполняя интегрирование по переменной x_ℓ , получаем следующий результат:

$$B_n = \frac{1}{2Gk_\ell^2 P_{2n}(0) Q_n} \int_0^{\infty} \sigma_{99}^*(r) W_n^\ell(x_\ell) dx_\ell,$$

где $Q_n = a_1/(4n-3) + a_2/(4n+1) + a_3/(4n+5)$.

Аналогичным образом определяются константы

$$C_n = \frac{1}{Gk_s^2 (2n+1) P_{2n}(0) S_n} \int_0^{\infty} \sigma_{9r}^*(r) W_n^s(x_s) dx_s,$$

где

$$W_n^s(x_s) = x_s^{-1/2} \left[J_{2n-1/2}(x_s) + J_{2n+3/2}(x_s) + J_{2n+7/2}(x_s) \right];$$

$$S_n = \beta_1/(4n-1) + \beta_2/(4n+3) + \beta_3/(4n+7).$$

Сумма напряжений $\sigma_{9\beta}^\lambda(r, \pi/2)$ удовлетворяет граничным условиям (1), (2), т. е. найденные потенциалы являются решением осесимметричной задачи Лэмба.

Рассмотрим модельную ситуацию, когда в круге ($r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \vartheta = \pi/2$) созданы изменяющиеся во времени по гармоническому закону нормальные напряжения с постоянной амплитудой σ_0 . Указанная нагрузка возбуждает продольную сферическую волну. Вектор смещения $\vec{u}^\ell(r, \vartheta)$ при этом определяется следующим образом:

$$u_r^\ell(x_\ell, \xi) = \frac{\sigma_0 R}{2G} x_\ell^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n^\ell(k_\ell R) \left[H_{2n-1/2}^{(2)}(x_\ell) - \frac{2n+1}{x} H_{2n+1/2}^{(2)}(x_\ell) \right] P_{2n}(\xi),$$

$$u_\vartheta^\ell(x_\ell, \xi) = \frac{\sigma_0 R}{2G} x_\ell^{-3/2} \sin \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} U_n^\ell(k_\ell R) H_{2n+1/2}^{(2)}(x_\ell) \frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial \xi},$$

где $U_n^\ell(k_\ell R)$ – амплитудный множитель n -ой сферической гармоники продольной волны, который определяется следующим выражением

$$U_n^\ell(k_\ell R) = \frac{1}{k_\ell R P_{2n}(0) Q_n} \int_0^{k_\ell R} W_n^\ell(x_\ell) dx_\ell.$$

На рис. 2 показаны графики амплитудных множителей $U_n^\ell(k_\ell R)$ первых десяти сферических гармоник продольной волны в упругом полупространстве с коэффициентом Пуассона $\eta = 0,3$.

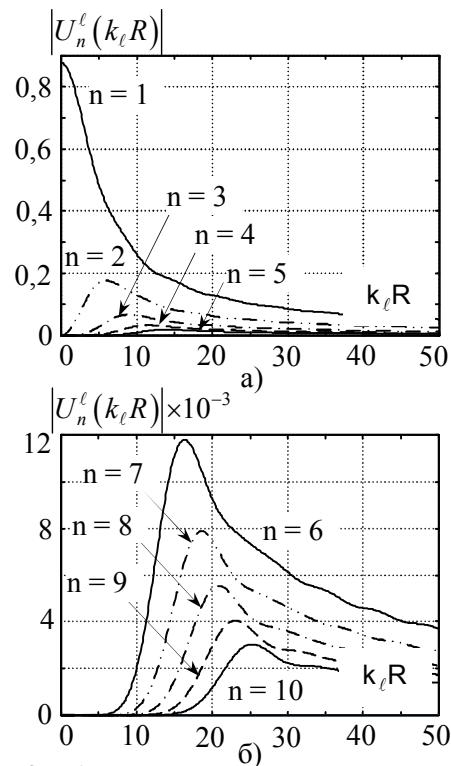


Рис. 2. Амплитудные множители сферических гармоник продольной волны, которая возбуждается напряжениями, равномерно распределенными в круге $r \leq R$

Список использованной литературы

1. Grinchenko V. T, Meleshko V. V. Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kyiv: Naukova dumka, 1981. – 283 p. (in Russian).
2. Nowacki W. The theory of elasticity. – Moscow: Mir, 1975. – 873 p. (in Russian).
3. Prudnikov A. P., Brychkov Y. A., Marichev O. I. Integrals and series. Special functions. – Moscow: Nauka, 1983. – 752 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 24.05.13