УДК 534.143-8

Петрищев О. Н.[1], д. т. н., проф.,
Романюк М. И.[1], аспирант

Возбуждение пространственно развитых волн Рэлея

Приводится постановка и результаты решения граничной задачи о возбуждении гармонических волн Рэлея системой поверхностных и объемных внешних сил, произвольно распределенных в ограниченной области упругого полупространства.

Ключевые слова: изотропное упругое полупространство, поверхностная и объемная плотность внешних сил, радиальное распространение, гармонические волны Рэлея.

[1] Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», 03056, г. Киев, ул. Политехническая, 16
e-mail: petrischev@ukr.net, romanyuk_rita@ukr.net

O. N. Petrishchev[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
M. I. Romanyuk[1], PhD student

Excitation of the spatial developed Rayleigh waves

Is given the formulation and results of boundary problem solution of harmonic Rayleigh waves excitation by surface and volume system of external forces, that are randomly distributed in a limited area of the elastic half-space.

Key words: isotropic elastic half-space, surface and volume density of external forces, the radial distribution, harmonic Rayleigh waves.

[1] National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
03056, Kyiv, str. Polytechnique, 16
e-mail: petrischev@ukr.net, romanyuk_rita@ukr.net

Введение

В устройствах акустоэлектроники, ультразвукового контроля поверхности металлопроката и в ряде других технических приложений используются источники поверхностных акустических волн (волн Рэлея), что формируют на поверхности и в объеме упругого полупространства систему нагрузок, которые не обладают осевой симметрией. Естественно, что формируемые ими волновые поля также не обладают осевой симметрией. В этой связи становится актуальной задача определения амплитудных множителей волн Рэлея, возбуждаемых системой объемных и поверхностных нагрузок, которые произвольным образом распределены в ограниченной области упругого полупространства.

Постановка задачи

Предположим, что в некоторой конечной области изотропного упругого полупространства (рис. 1) с плотностью ρ_0 и с модулями упругости λ и G заданы гармонически изменяющиеся во времени t по закону $e^{i\omega t}$ ($i=\sqrt{-1}$; ω – круговая частота) внешние силы.

На площадке S^* (рис. 1) заданы амплитуды поверхностных плотностей внешних сил $\sigma^*_{3j}(x_1, x_2)$ $(j=1, 2, 3)$, а в объеме V^* – амплитуды объемных плотностей $f^*_j(x_j)$. Будем полагать, что в области $x_3>0$ отсутствуют материальные объекты, т. е. находится вакуум.

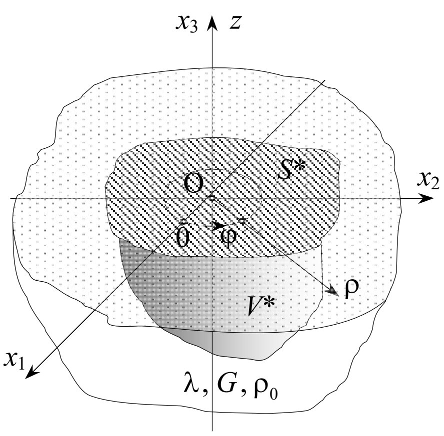

Рис. 1. Расчетная схема задачи

Указанная система внешних сил возбуждает волны Рэлея, которые распространяются в радиальных направлениях вдоль поверхности $x_3=0$ полупространства, и невзаимодействующие сферические продольные и поперечные волны, которые уносят энергию источника внешних сил в объем полупространства [1].

Вектор смещения $\vec{u}(x_j)e^{i\omega t}$ материальных частиц изотропного полупространства должен удовлетворять уравнениям установившихся гармонических колебаний

$$(\lambda+2G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}(x_j)-G\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}(x_j)+$$
$$+\rho_0\omega^2\vec{u}(x_j)-\vec{f}^*(x_j)=0 \quad \forall x_j\in V, \quad (1)$$

где V – объем полупространства.

Деформации, которые возникают при смещениях материальных частиц, сопровождаются упругими напряжениями $\sigma_{ij}(x_j)e^{i\omega t}$, амплитуды которых на поверхности S $(x_3=0)$ полупространства должны удовлетворять третьему закону Ньютона, т. е.

$$\sigma_{3j}(x_j)-\sigma^*_{3j}(x_j)=0 \quad \forall x_j\in S. \quad (2)$$

Решения неоднородной граничной задачи (1), (2), т. е. компоненты $u_k(x_j)$ вектора смещения $\vec{u}(x_j)$ должны удовлетворять условиям физической реализуемости источника упругих возмущений, т. е. предельным условиям следующего вида

$$\lim_{R\to\infty}\left\{Ru_k(x_j),\, R\frac{\partial u_k(x_j)}{\partial x_j}\right\}=0, \quad (3)$$

где R – расстояние от источника, т. е. от области V^*+S^* существования внешних сил.

Результаты решения граничной задачи

Общее решение однородной граничной задачи, которая соответствует задаче (1), (2) при $\vec{f}^*(x_j)=0$ и $\sigma^*_{3j}(x_j)=0$ достаточно просто получается при использовании представления Гельмгольца $\vec{u}(x_j)=\operatorname{grad}\Phi(x_j)+\operatorname{rot}\vec{\Psi}(x_j)$, где $\Phi(x_j)$ и $\vec{\Psi}(x_j)$ – амплитудные значения скалярного и векторного потенциалов. Проводя вычисления в цилиндрической системе координат (ρ,φ,z) (рис. 1), можно показать, что пространственно развитые волны Рэлея определяются скалярным потенциалом и двумя, не равными нулю, компонентами $\Psi_\rho(\rho,\varphi,z)$ и $\Psi_\varphi(\rho,\varphi,z)$ векторного потенциала. При этом компоненты вектора смещения материальных частиц определяются следующими соотношениями:

$$u_\rho(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\gamma_R)R_\rho(\gamma_R,z)\times$$
$$\times\left[H^{(2)}_{m-1}(\gamma_R\rho)-H^{(2)}_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix},$$
$$u_\varphi(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\gamma_R)R_\rho(\gamma_R,z)\times$$
$$\times\left[H^{(2)}_{m-1}(\gamma_R\rho)+H^{(2)}_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix},$$
$$u_z(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\gamma_R)W_z(\gamma_R,z)\times$$
$$\times H^{(2)}_{m}(\gamma_R\rho)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}, \quad (4)$$

где m – элемент ряда натуральных чисел; $R_m(\gamma_R)$ – амплитудный множитель m-ой цилиндрической гармоники; γ_R – волновое число волны Рэлея;

$$R_\rho(\gamma_R,z)=\gamma_R[e^{\alpha z}-2\alpha\beta e^{\beta z}/(\gamma_R^2+\beta^2)]$$

– функция распределения по глубине полупространства радиальных смещений материальных частиц; α и β – отстающие по фазе на $\pi/2$ проекции волновых векторов $\vec{k}_\ell$ и $\vec{k}_s$ взаимодействующих продольных (ℓ) и сдвиговых (s) гармонических волн, которые распространяются со скоростями $\upsilon_\ell=\sqrt{(\lambda+2G)/\rho_0}$ и $\upsilon_s=\sqrt{G/\rho_0}$ соответственно. При этом $k_\ell^2=\gamma_R^2-\alpha^2$ и $k_s^2=\gamma_R^2-\beta^2$, а волновые числа α, β и γ_R удовлетворяют условию существования рэлеевской волны, т. е. трансцендентному уравнению следующего вида:

$$\Delta_R(\chi_R)=(\gamma_R^2+\beta^2)^2-4\gamma_R^2\alpha\beta=0,$$

где $\chi_R=\gamma_R^2$. Символами $H^{(2)}_\nu(\gamma_R\rho)$ $(\nu=m;\,m\pm1)$ в соотношениях (4) обозначены функции Ханкеля второго рода. Распределение аксиальных смещений материальных частиц полупространства определяется функцией

$$W_z(\gamma_R,z)=\alpha[e^{\alpha z}-2\gamma_R^2e^{\beta z}/(\gamma_R^2+\beta^2)].$$

Амплитудный множитель $R_m(\gamma_R)$ определяется из решения неоднородной граничной задачи (1), (2), которое, благодаря условию (3), осуществляется с помощью интегральных преобразований Ханкеля [2]. Выражение для его расчета записывается в следующем виде:

$$R_m(\gamma_R)=\frac{i\pi}{2G\Delta'_R(\chi_R)}\left[\frac{(\gamma_R^2+\beta^2)^2}{\alpha k_s^2}W_0(\gamma_R)-\right.$$
$$\left.-2\gamma_R\beta\sigma_0^{(m)}(\gamma_R)+{}^{(m)}\sigma_{zz}^*(\gamma_R)(\gamma_R^2+\beta^2)\right],$$

где

$$\Delta'_R(\chi_R)=d\,\Delta_R(\chi_R)/d\chi_R\ ;$$

$$W_0(\gamma_R)=\int\limits_{-\infty}^{0}\left[F_0^{(m)}(\gamma_R,z)R_\rho(\gamma_R,z)+f_z^{(m)}(\gamma_R,z)\times\right.$$
$$\left.\times W_z(\gamma_R,z)\right]dz;$$

$$F_0^{(m)}(\gamma_R,z)=\frac{1}{2\pi\delta_m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\rho\left\{f_\rho^*(\rho,\varphi,z)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times\right.$$
$$\times\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)-J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]+f_\varphi^*(\rho,\varphi,z)\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}\times$$
$$\left.\times\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)+J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\right\}d\rho d\varphi;$$

$\delta_m=(2$ для $m=0;\,1\ \forall m\ge1)$; $J_\nu(\gamma_R\rho)$ $(\nu=m;\,m\pm1)$ – функции Бесселя порядка ν;

$$f_z^{(m)}(\gamma_R,z)=\frac{1}{\pi\delta_m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\rho f_z^*(\rho,\varphi,z)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times$$
$$\times J_m(\gamma_R\rho)(\gamma_R\rho)d\rho d\varphi;$$

$$\sigma_0^{(m)}(\gamma_R)=\frac{1}{2\pi\delta_m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\rho\left\{\sigma_{z\rho}^*(\rho,\varphi)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times\right.$$
$$\times\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)-J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]+\sigma_{z\varphi}^*(\rho,\varphi)\times$$
$$\left.\times\begin{pmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{pmatrix}\left[J_{m-1}(\gamma_R\rho)+J_{m+1}(\gamma_R\rho)\right]\right\}d\rho d\varphi;$$

$${}^{(m)}\sigma_z^*(\gamma_R)=\frac{1}{\pi\delta_m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\rho\sigma_{zz}^*(\rho,\varphi)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\times$$
$$\times J_m(\gamma_R\rho)d\rho d\varphi.$$

Рассмотрим модельный пример.

Предположим, что на поверхности полупространства в круге $\rho\le R$ задана гармонически изменяющаяся во времени по закону $e^{i\omega t}$ аксиальная нагрузка с амплитудой поверхностной плотности $\sigma_{zz}^*(\rho)=(\sigma_0\ \forall\rho\le R,\ 0\ \forall\rho>R)$. При этом возбуждаются осесимметричные, радиально распространяющиеся волны Рэлея. Из общих соотношений (4) следует, что смещения материальных частиц упругого полупространства определяются следующим образом:

$$u_\rho(\rho,z)=-R_0(\gamma_R)\frac{R_\rho(\gamma_R,z)}{\gamma_R}H_1^{(2)}(\gamma_R\rho),$$

$$u_z(\rho,z)=R_0(\gamma_R)\frac{W_z(\gamma_R,z)}{\gamma_R}H_0^{(2)}(\gamma_R\rho),$$

где

$$R_0(\gamma_R)=i\pi\frac{\sigma_0 R}{2G}f(\nu)J_1(\gamma_R R);$$

$$f(\nu)=(\gamma_R^2+\beta^2)/\Delta'_R(\chi_R),$$

$f(\nu)$ – безразмерное число, которое не зависит от частоты, но зависит от значений коэффициента Пуассона ν. Для $\nu=0{,}3$ константа $f(\nu)=$ $=-0{,}507774$. Функция Бесселя первого порядка $J_1(\gamma_R R)$ определяет влияние размеров площадки нагружения на эффективность возбуждения ультразвуковых волн на заданной частоте смены знака внешних сил. Эта функция убывает с ростом частоты (безразмерного волнового числа $\gamma_R R$), а на частотах, которым соответствуют волновые числа $\gamma_R R=3{,}8317$, $\gamma_R R=7{,}0156$, $\gamma_R R=$ $=10{,}1735$ и т. д., обращается в нуль. Сообразно этому изменяются амплитудные значения смещений материальных частиц во фронте рэлеевской волны.

Указанные особенности частотно зависимого изменения амплитуд смещений объясняются интерференцией волновых полей, которые излучаются в упругую среду различными участками деформируемого твердого тела, находящимися в области действия внешних сил.

Выводы

Впервые, в приближении дальнего поля, решена задача о возбуждении радиально распространяющихся, пространственно развитых волн Рэлея. Полученные результаты могут быть использованы при разработке излучателей ультразвуковых волн в устройствах акустоэлектроники и неразрушающего контроля листового металлопроката.

Список использованных источников

1. *Hrinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kiev: Naukova dumka, 1981. – 283 p. (in Russian).
2. *Koshlyakov N. S., Gleaner E. B., Smirnov M. M.* Partial differential equation of mathematical physics. – Moscow: Vyshcha shcola, 1970. – 710 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 21.05.13