

УДК 539.3

Попов В. Г.¹, д. ф.-м. н., проф.

Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву

Розв'язана задача визначення динамічних КІН для двох тріщин, що виходять з однієї точки, при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву. Коливання відбуваються внаслідок дії на береги тріщин зсувного гармонічного навантаження. Вихідна задача приведена до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання цієї системи запропоновано числовий метод, який враховує справжню асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: тріщини, сингулярні інтегральні рівняння, нерухома особливість, гармонічні коливання.

¹ Одеська національна морська академія, 65029, м. Одеса, вул. Дидріхсона, 8
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

Постановка задачі і зведення її до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (ССІДР)

Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить дві тріщини, що виходять з однієї точки (рис.1). Ці тріщини у площині Oxy займають відрізки $2d_k$ і утворюють з віссю Ox кути α_k , $k=1, 2$. В тілі відбуваються гармонічні коливання повздовжнього зсуву внаслідок дії на береги тріщин зсув-

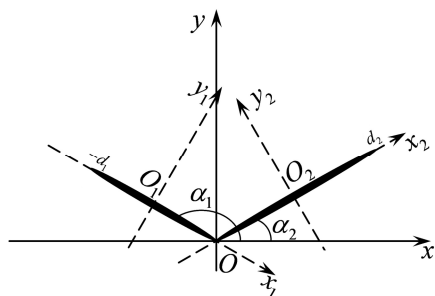


Рис. 1. Дві тріщини, що виходять з однієї точки

© В. Г. Попов, 2013

V. G. Popov¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

The stress condition near two cracks, which begin of one point under harmonic longitudinal oscillation

The problem of determination the dynamic SIF is solved for two cracks, which begin of one point. The oscillations are the result of harmonic longitudinal load at the cracks edges. The original problem is reduced to the system of two singular integro-differential equations with the fixed singularity. The numerical method of this system solving which considers real asymptotic unknown function and special quadrature formulas for singular integrals is proposed.

Key Words: cracks, singular integral equations, fixed singularity, harmonic oscillation.

¹ Odessa national maritime academy, 65029, Odessa, 8, Didrikhsona str.
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

ного навантаження $Pe^{-i\omega t}$. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, далі відкинуто. Нехай $w(x, y)$ єдина відмінна від 0 при антиплоскій деформації компонента вектора переміщень. Вона визначається з рівняння Гельмгольца

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 / G, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа в системі координат Oxy , ω – частота коливань, ρ, G – густина і модуль зсуву тіла. Для формулювання граничних умов на тріщинах з кожною з них зв'язується локальна система координат $O_l x_l y_l$, $l=1, 2$ (рис.1). Нехай $w_l(x_l, y_l)$ отримано в результаті переходу у $w(x, y)$ до локальних координат. Тоді на кожній з тріщин виконуються умови

$$\begin{aligned} \tau_{zy_l}(x_l, 0) &= P, \quad |x_l| < d_l, \\ \tau_{zy_l} &= G \frac{\partial w_l}{\partial y_l}, \quad l=1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Також на кожній тріщині переміщення $w_l(x_l, y_l)$ є розривними з невідомими стрибками

$$w_l(x_l, +0) - w_l(x_l, -0) = \chi_l(x_l), \quad (3)$$

$$\chi_l(\pm d_l) = 0, \quad l = 1, 2.$$

При сформульованих умовах ставиться задача визначити переміщення і напруження хвильового поля в тілі і КІН для тріщин.

Для розв'язання цієї задачі для кожної тріщини у системі координат зв'язаній з нею будується розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибками (3) [2]

$$w_k^d(x_k, y_k) = \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k(\eta) \frac{\partial}{\partial y_k} r_2(\eta - x_k, y_k) d\eta, \quad (4)$$

$$r_2 = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_k)^2 + y_k^2} \right), \quad k = 1, 2.$$

Після цього переміщення у системі Oxy подаються у вигляді

$$w(x, y) = w_1^g(x, y) + w_2^g(x, y), \quad (5)$$

де $w_k^g(x, y)$, $k = 1, 2$, знаходяться за формулами (4) після переходу в них до координат Oxy . Щоб остаточно визначити переміщення і напруження в тілі слід знайти невідомі стрибки переміщень (3) (розкриття тріщин). Для цього слід скористатися умовами (2). Попередньо знаходимо напруження у системах координат пов'язаних з l -ою тріщиною

$$\tau_{zy_l} = \sum_{k=1}^2 \tau_{zy_k}^k, \quad l = 1, 2, \quad (6)$$

$$\tau_{zy_l}^k = -\tau_{zx_k}^d \sin \alpha_{lk} + \tau_{zy_k}^d \cos \alpha_{lk}, \quad \alpha_{lk} = \alpha_l - \alpha_k.$$

Згідно з (5) доданки у (6) визначаються за формулами

$$\tau_{zy_l}^k = G \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k'(\eta) \frac{i\kappa_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(\kappa_2 \sqrt{Q_{lk}})}{\sqrt{Q_{lk}}} \times \quad (7)$$

$$\times ((\eta + d_k) \cos \alpha_{lk} - (x_l + d_l)) d\eta +$$

$$+ \frac{i\kappa_2^2}{4} G \cos \alpha_{lk} \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k(\eta) H_0^{(1)}(\kappa_2 \sqrt{Q_{lk}}) d\eta,$$

$$Q_{lk} = (\eta + d_k - (x_l + d_l) \cos \alpha_{lk} + y_l \sin \alpha_{lk})^2 +$$

$$+ ((x_l + d_l) \sin \alpha_{lk} + y_l \cos \alpha_{lk})^2.$$

Після підстановки (6) і (7) у (2) отримана система двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_1'(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \zeta} + R_{11}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_2'(\tau) [g_{12}(\tau, \zeta) + R_{11}(\tau - \zeta)] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(\tau) [-\gamma_1^2 \kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + U_{11}(\tau - \zeta)] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(\tau) U_{12}(\tau, \zeta) d\tau = p_0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_1'(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \zeta} + R_{22}(\tau - \zeta) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_1(\tau) [g_{21}(\tau, \zeta) + R_{21}(\tau - \zeta)] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(\tau) [-\gamma_2^2 \kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + U_{22}(\tau - \zeta)] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_2(\tau) U_{21}(\tau, \zeta) d\tau = p_0,$$

У системі (8) введені наступні позначення:

$$\eta = d_k \tau, \quad x_l = d_l \zeta, \quad y_l = d^{-1} d_l,$$

$$\kappa_0 = \kappa_2 d, \quad d = \max(d_1, d_2), \quad p_0 = P/G,$$

$$\phi_k(\tau) = d_k^{-1} \chi_k(d_k \tau), \quad \gamma_k = d_k/d, \quad k, l = 1, 2,$$

$$g_{12}(\tau, \zeta) = \frac{(\gamma_2(1 + \tau) \cos \beta + \gamma_1(1 - \zeta)) \gamma_2}{q_{12}(\tau, \zeta)},$$

$$g_{21}(\tau, \zeta) = \frac{-(\gamma_1(1 - \tau) \cos \beta + \gamma_2(1 + \zeta)) \gamma_1}{q_{21}(\tau, \zeta)},$$

$$q_{12}(\tau, \zeta) = \gamma_2^2 (1 + \tau)^2 + \gamma_1^2 (1 - \zeta) +$$

$$+ 2\gamma_1 \gamma_2 (1 - \zeta) (1 + \tau) \cos \alpha_{12},$$

$$q_{21}(\tau, \zeta) = \gamma_1^2 (1 - \tau)^2 + \gamma_2^2 (1 + \zeta)^2 +$$

$$+ 2\gamma_1 \gamma_2 (1 + \zeta) (1 - \tau) \cos \alpha_{21}.$$

Наближене розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь

Наявність у системі (8) нерухомих особливостей при $\tau = -1, \zeta = 1$ і $\tau = 1, \zeta = -1$ впливає на поведінку її розв'язків в околі точок $\tau = \pm 1$. Асимптотика розв'язків в цих точках визначається так, як і у випадку жорстких включень, що входять з однієї точки [3]. Встановлено, що похідні невідомих функцій слід розшукувати у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi'_l(\tau) &= W_l(\tau)\psi_l(\tau), \quad l=1, 2, \\ W_1(\tau) &= (1-\tau)^{-\sigma}(1+\tau)^{-1/2}, \\ W_2(\tau) &= (1-\tau)^{-1/2}(1+\tau)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (9)$$

де степеневий показник визначається рівністю $\sigma = (\pi - \beta)/(2\pi - \beta)$, $\beta = |\alpha_2 - \alpha_1|$, $0 \leq \beta \leq \pi$, а функції $\psi_l(\tau)$ вважаються такими, що задовольняють умови Гольдера на $[-1, 1]$.

Наближене розв'язання ґрунтується на апроксимації цих функцій інтерполяційними многочленами

$$\begin{aligned} \psi_l(\tau) &\approx \psi_{n-1}^{(l)}(\tau), \\ \psi_{n-1}^{(l)}(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{P_{ln}(\tau)}{(\tau - \tau_{lm})P'_{ln}(\tau)}, \quad \psi_{lm} = \psi_l(\tau_{lm}), \end{aligned} \quad (10)$$

де $P_{ln}(\tau) = P_n^{-\sigma-1/2}(\tau)$, $P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2-\sigma}(\tau)$ – многочлени Якобі, ортогональні з ваговими функціями $W_l(\tau)$, а τ_{lm} – корені цих многочленів. При поданні невідомих функцій у вигляді (9), (10), для інтегралів з ядром Коші мають місце наступні квадратурні формули [1]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi'_l(\tau)}{\tau - \zeta_j} d\tau = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{A_{lm}}{\tau_{lm} - \zeta_j}, \quad (11)$$

$$l=1, 2, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

У формулі (11) ζ_j ($l=1, 2, j=1, 2, \dots, n$) – нулі функцій Якобі другого роду $J_n^{-\sigma-1/2}(\tau)$ і $J_n^{-1/2-\sigma}(\tau)$, а A_{lm} – коефіцієнти відповідних квадратурних формул Гаусса – Якобі [11].

Далі відповідні квадратурні формули необхідно знайти для інтегралів з нерухомими особливостями

$$E_{lk}^j = \int_{-1}^1 \varphi'_k(\tau) g_{lk}(\tau, \zeta_j) d\tau, \quad l, k=1, 2, l \neq k. \quad (12)$$

Якщо $1 \pm \zeta > \varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$, $g_{lk}(\tau, \zeta)$ є нескінченно диференційованими і до інтегралів (12) може бути застосована квадратурна формула Гаусса – Якобі. Коли $1 \pm \zeta \rightarrow 0$, використовуються подання (9), (10) і метод для обчислення інтегралів з ортогональними многочленами [10], за допомогою інтегрального перетворення Мелліна і теореми про згортку. Остаточні формули для інтегралів (12) мають вигляд

$$E_{lk}^j = \sum_{m=1}^n \psi_{km} \frac{D_{jm}^{lk}}{q_{lk}(\tau_{km}, \zeta_j)}, \quad l, k=1, 2, l \neq k, \quad (13)$$

де при $1 - \zeta_{1j} > \varepsilon > 0$ і $1 + \zeta_{2j} > \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} D_{jm}^{12} &= A_{2m} \gamma_2 (\gamma_2 (1 + \tau_{2m}) \cos \beta + \gamma_1 (1 - \zeta_{1j})), \\ D_{jm}^{21} &= A_{1m} \gamma_1 (\gamma_1 (1 - \tau_{1m}) \cos \beta + \gamma_2 (1 + \zeta_{2j})). \end{aligned}$$

А при $1 - \zeta_{1j} \rightarrow 0$ і $1 + \zeta_{2j} \rightarrow 0$ коефіцієнти D_{jm}^{lk} подаються швидко збіжними рядами за степенями $1 \pm \zeta_j$.

Для обчислення інтегралів з функціями $\varphi_k(\tau)$ спочатку знаходиться їх наближене значення за допомогою формул

$$\begin{aligned} \varphi_l(\tau) &= \left(1 - (-1)^l \tau\right)^{1/2} \sum_{m=1}^n A_{lm} \psi_{lm} S_{lm}(\tau), \\ S_{lm}(\tau) &= F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1 - (-1)^l \tau}{2}\right) \frac{(-1)^l 2^{1-\sigma}}{\sigma_0} \\ &\quad - \left(1 + (-1)^l \tau\right)^{1-\sigma} \sum_{j=1}^n \frac{P_{lj}(\tau_{lm}) P_{lj}^{(1)}(\tau)}{2j\sigma_j^2}, \quad l=1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Далі для інтегралів, що містять $\varphi_k(\tau)$ застосовуються квадратурні формули Гаусса – Якобі. Для інтегралів з логарифмічною особливістю отримані наступні квадратурні формули:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) \ln|\tau - \zeta_j| d\tau &= \sum_{m=1}^n A_{lm} H_{jm}^l \psi_{lm}, \\ H_{jm}^{(l)} &= (-1)^l \left(1 + (-1)^l \zeta_j\right) \left(\ln|1 + (-1)^l \zeta_j| - 1\right) - \\ &\quad - (\tau_{lm} - \zeta_j) \left(\ln|\tau_{lm} - \zeta_j| - 1\right), \quad l=1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Застосування квадратурних формул (11), (13), а також формул Гаусса – Якобі приводить до заміни (8) на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно ψ_{lm} .

Для механіки руйнування найбільшу цікавість являє коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{x_1 \rightarrow -d_1 - 0} \sqrt{-x_1 - d_1} \tau_{y_1 z}^1(x_1, 0), \\ K_2 &= \lim_{x_2 \rightarrow d_2 + 0} \sqrt{x_2 - d_2} \tau_{y_2 z}^2(x_2, 0). \end{aligned}$$

Після розв'язання системи (8) наближені значення КІН обчислюються за формулою

$$\frac{K_l}{G\sqrt{d_l}} = \frac{P_{ln}((-1)^l)}{-2^{1+\sigma}} \sum_{m=1}^n \frac{\psi_{lm}}{P_{ln}'(\tau_{lm})(1 - (-1)^l \tau_{lm})}. \quad (16)$$

Результати числового аналізу і висновки

При числовій реалізації перш за все була досліджена практична збіжність запропонованого

наближеного методу розв'язання ССІДР. Для цього розглядалися дві тріщини однакової довжини d , що виходять з початку координат симетрично відносно осі Oy і утворюють між собою кут $\beta = 90^\circ$. Внаслідок симетрії $K_1 = K_2 = K$. Результати розрахунків подані на рис. 2 у вигляді графіків залежності абсолютного значення безрозмірного КІН $k = K/G\sqrt{d}$ від безрозмірного хвильового числа κ_0 . Кожна крива відповідає вказаному числу вузлів інтерполяції у формулі (10). Як можна бачити, при коливаннях з низькою частотою ($0 < \kappa_0 \leq 1$) для отримання значень КІН з похибкою меншою 0,1% досить 5 вузлів інтерполяції у (10). В усьому розглянутому частотному діапазоні вказана точність досягається при 15-20 вузлах інтерполяції.

Далі досліджено вплив на значення КІН величини кута, утвореного тріщинами. Ці результати показано на рис. 3, де криві 1-4 відповідають наступним значенням кута β : 30° , 60° , 120° , 180° . Як показують графіки, при частотах, таких що $\kappa_0 \leq 2$, при збільшенні кута між тріщинами значення КІН зменшуються і приймають мінімальне значення у випадку прямолінійної тріщини ($\beta = 180^\circ$). Характерним є наявність частот, при яких КІН приймає максимальні значення, які суттєво, до 10 разів, перевищують значення при аналогічному статичному навантаженні.

Список використаних джерел

1. *Andreev A. V.* Direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // *Mech. Solids.* – 2005. – 40 (1). – P. 104-119.
2. *Popov V. G.* Studies of Stress and Displacement Fields under Shear Wave Diffraction on a Thin Rigid Separated Inclusion // *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela.* – 1992. – No. 3. – P. 139-146. [*Mech. Solids (Engl. Transl.)*].
3. *Popov V. G.* The diffraction of the shear elastic waves on the complex form inclusion situated in the unbounded elastic medium // *Hydroaeromechanics and elasticity theory.* – 1986. – P. 121-127. (in Russian).
4. *Krylov V. I.* Approximate Computations of Integrals. – Moscow: Nauka, 1967. (in Russian).
5. *Popov G. Ya.* Concentration of Elastic Stresses Near Punches, Cuts, Rigid Inclusions, and Stiffeners. – Moscow: Nauka, 1982. (in Russian).

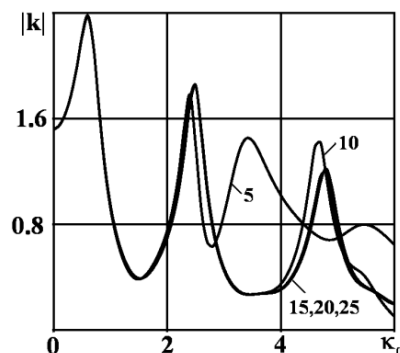


Рис. 2. Практична збіжність числового методу

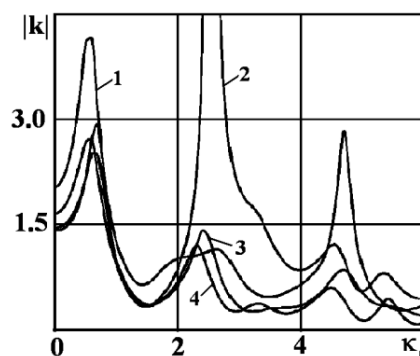


Рис. 3. Залежність КІН від хвильового числа при різних значеннях кута, утвореного тріщинами

Надійшла до редколегії 25.03.13