

УДК 539.9

П'ятецька О. В.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н.

### Дисипативний розігрів та ефективність роботи сенсора при резонансних коливаннях пластини

Розглядається задача про вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів при вимушених резонансних коливаннях тонкої в'язкопружної прямокутної пластини з шарнірним закріпленням торців. Розв'язок задачі одержано за допомогою варіаційного методу. Досліджено вплив розмірів сенсора і температури дисипативного розігріву на показники сенсора.

Ключові слова: п'єзоелектричні сенсори, демпфування, різниця потенціалів.

<sup>1</sup> Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

Для активного демпфірування усталених гармонічних коливань тонких пластин із пасивних матеріалів за допомогою сенсорів та актуаторів в її структуру вводяться п'єзоелектричні включення, які виконують роль сенсорів. Вони можуть бути розміщені як на поверхні пластини, так і у будь-якому місці по її товщині, покривати всю область пластини або наноситись у вигляді плям. Основна функція цих включень – дати інформацію про механічну поведінку пластини, зокрема, про амплітуду резонансних коливань. Маючи показники сенсора, для демпфірування коливань до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна цим показникам. Тому ефективність демпфірування суттєво залежить від роботи сенсора.

Загальна теорія вимушених коливань шаруватих пластин з пасивних в'язкопружних ортотропних матеріалів з розподіленими поляризованими по товщині трансверсально-ізотропними сенсорами із врахуванням впливу дисипативного розігріву представлена в [4]. Основні співвідношення виведені на основі гіпотез Кірхгофа – Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно розподілу електричних польових величин по товщині пластини. Пасивні шари можуть бути металічними, полімерними або композитними. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуються на основі кон-

O. V. Pyatetska<sup>1</sup>, PhD (Phys.-Math.)

### Dissipative heating and efficiency sensors work by resonance vibrations of plates

The problem of influence temperature of dissipative heating on efficiency piezoelectric sensors work by resonance vibrations of thin viscoelastic rectangular plate is considered. The problem is solved by the variation method. The influence sensors dimensions and temperature of dissipative heating on sensors indicator is investigated.

Key Words: piezoactuators, damping, potential difference.

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4 e Glushkov ave., Kyiv, 03187, Ukraine e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

цепції комплексних характеристик [1-3]. Деформації і кути повороту вважались настільки малими, що кінематичні співвідношення між деформаціями та переміщеннями є лінійними.

Розглянемо випадок згинних коливань пластини, яка складається з пасивного середнього шару товщиною  $h_0$ , що лежить між верхнім та нижнім протилежно поляризованими п'єзоактивними шарами однакової товщини  $h_1$ . Властивості цих п'єзошарів відрізняються тільки знаками п'єзоконстанти.

Рівняння енергії, яке описує дисипативний розігрів, для згинних коливань має вигляд

$$\lambda_{11}\theta_{,xx} + \lambda_{22}\theta_{,yy} - (2\delta/h)\theta + W/h = 0, \quad (1)$$

де  $\theta = T - T^0$ ,  $T^0 = (\alpha_3\theta_3 + \alpha_4\theta_4)/(\alpha_3 + \alpha_4)$ ,  $\delta = (\alpha_3 + \alpha_4)/2$ ;  $\alpha_3, \alpha_4$  – коефіцієнти теплообміну на поверхнях  $z = \pm h/2$  із зовнішнім середовищем з температурами  $\theta_3, \theta_4$ ;  $\lambda_{ij}$  – коефіцієнти теплопровідності. В (1) дисипативна функція  $W$  для згинних коливань розраховується за спрощеною формулою:

$$W = \frac{\omega}{2} [(M_1''\chi_1' - M_1'\chi_1'') + (M_2''\chi_2' - M_2'\chi_2'') + 2(H_1''\chi_{12}' - H_1'\chi_{12}'')].$$

Спрощене у випадку згинних коливань визначальне рівняння для індукції [4] приймає вигляд

$$\frac{D_3}{\gamma_{33}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}} [z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (2)$$

Для пасивних пластин з розподіленими сенсорами важливе значення мають електричні граничні умови на сенсорах. Розглянемо випадок електричних граничних умов, що відповідають розімкнутим електродам. Для кожного із п'єзошарів при згинних коливаннях будемо мати співвідношення

$$\frac{C}{\gamma_{33}} = E_3 + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}} [(\kappa_1 + \kappa_2)], \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Якщо внутрішні електрооди відсутні, то згідно з наведеними вище гіпотезами

$$D_3 = C(\alpha, \beta) = \gamma_{33} E_\gamma + \gamma_{31} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (4)$$

Для розімкнутих електродів при згинних коливаннях з (4) маємо

$$C(\alpha, \beta) = \frac{w_{11}}{v_{10}} (\kappa_1 + \kappa_2).$$

Для розімкнутих електродів різниця потенціалів визначається із рівності нулю струму, так що

$$V_S = -\frac{1}{\int_{(S)} \frac{dx dy}{v_{10}}} \iint_{(S)} \left( \frac{w_{11}}{v_{10}} (\kappa_1 + \kappa_2) \right) dx dy. \quad (5)$$

Для пасивного шару покладаємо:  $\gamma_{31} = 0$ . При цьому

$$E_3 = \frac{C(x, y)}{\gamma_{33}(z)} - \frac{\gamma_{31}(z)}{\gamma_{33}(z)} [z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (6)$$

Підставляючи (6) у подані в [4] спрощені рівняння, одержимо спрощені вирази для напружень. Після їх інтегрування по товщині отримаємо рівняння стану для зусиль та моментів. Як і для актуаторів, при демпфіруванні коливань за допомогою сенсорів у більшості випадків через їх малу товщину можна знехтувати впливом сенсорів на жорсткісні характеристики пластини. При дії на пластину рівномірного поверхневого тиску, що змінюється з часом за гармонічним законом, термомеханічна поведінка ізотропної пластини описується нелінійною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [D(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}] - (\gamma h) \omega^2 w - p_0(x, y) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega E''(T) h^3}{24(1-\nu^2)(\lambda h)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (7)$$

Тут  $D = D' + iD''$  – комплексна згинна жорсткість;  $\rho$  – густина матеріалу;  $\omega$  – частота коливань; якщо нехтувати впливом п'єзошарів на згинну жорсткість, то  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ ,  $E, \nu$  – комплексні модуль і коефіцієнт Пуасона;  $T$  – температура дисипативного розігріву;  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою  $T_C$ ;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

До цієї системи рівнянь необхідно додати традиційні механічні та теплові граничні умови. Для розімкнутих електродів різницю потенціалів, яку показує сенсор при згинних коливаннях пластини, можна подати у вигляді

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1) \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu_s)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy}{2 \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \varepsilon_{33}(1-k_p^2) dx dy}. \quad (8)$$

Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (8) набуває вигляду

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1) k_p^2}{2S d_{31}(1-k_p^2)} \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Для дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора необхідно спочатку знайти показники сенсора без врахування впливу температури дисипативного розігріву, потім розв'язати нелінійні диференціальні рівняння типу (7) з граничними умовами, що відповідають шарнірному закріпленню торців, потім підставити знайдену температуру та прогин у представлені вище формули для показників сенсора у залежності від температури дисипативного розігріву.

Використаємо варіаційний метод для розв'язання сформульованої вище задачі, так як різниця потенціалів є інтегральною характеристикою. Орієнтуючись на вимушені коливання на першій

резонансній частоті, вибираємо стандартний для шарнірного закріплення торців пластини вираз для прогину:

$$w = A \sin k_1 x \sin p_1 y, \quad k_1 = \frac{\pi}{a}, \quad p_1 = \frac{\pi}{b}. \quad (9)$$

Якщо на контурі задана постійна температура  $T_C$ , апроксимацію температури вибираємо так:

$$\theta = T - T_C = \theta_0 \sin k_1 x \sin p_1 y.$$

З використанням варіаційного методу та методу Бубнова – Гальоркіна, знайдемо [3]:

$$\theta_0 = \frac{8\omega W_0^2 a^2}{(\lambda h)\pi^4} \cdot \frac{a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{9}a_2}{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2\alpha a^2}{\lambda h \pi^2}}. \quad (10)$$

Максимальний розігрів буде мати місце в центрі пластини, так що при постійній температурі на контурі максимальна температура  $\theta_{\max} = \theta_0$ . Прирівнюючи вираз для  $\theta_0$  температурі Кюрі, одержимо вираз для критичного значення параметра навантаження  $W_{0K}^2$ , після перевищення якого актуатор перестав виконувати своє функціональне призначення:

$$W_{0K}^2 = \frac{(\lambda h)\pi^4 \theta_K}{8\omega a^2} \frac{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2\alpha a^2}{\lambda h \pi^2}}{a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{9}a_2}.$$

Якщо властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, то для заряду одержимо [4]:

$$Q = -\frac{w_{11}}{v_{10}(s)} \iint (\kappa_1 + \kappa_2) dx dy. \quad (11)$$

З цієї формули видно, що дисипативний розігрів впливає на величину заряду і у випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, так як дисипативний розігрів впливає на амплітуду коливань (амплітуда у виразі (11) з'являється тільки у чисельнику).

Ефективність роботи сенсора оцінюється за величиною різниці показників сенсора при фіксованому навантаженні: той сенсор більш ефективний, для якого цей показник більший при фіксованій інтенсивності  $p_0$ . Користуючись формулою (11), легко показати, що при розміщенні центра сенсора розмірами  $c \times d$  у точці в центрі пластини має місце формула

$$Q = \frac{(k_1^2 + p_1^2) w_{11}}{k_1 p_1 v_{10}} A \sin^2 \frac{\pi l}{2L}. \quad (12)$$

Звідси випливає, що робота сенсора буде найбільш ефективною при повному покритті за умови збігу центра актуатора з центром пластини. При вказаному виборі центра актуатора залежність величини  $Y = Q k_1 p_1 v_{10} / [(k_1^2 + p_1^2) w_{11}]$  від довжини діагоналі актуатора  $s = l/L$  ( $l, L$  – довжини діагоналей актуатора та пластини відповідно) визначається виразом:

$$Y = \sin^2(\pi s/2). \quad (13)$$

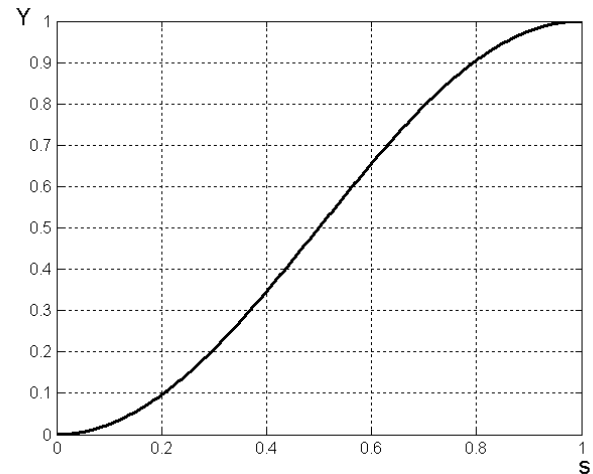


Рис. 1. Залежність величини (13) від довжини діагоналі актуатора

Як видно з цього графіка, спочатку спостерігається різке збільшення заряду, а потім – незначна його зміна. В області повільної зміни різниці потенціалів можна розмістити декілька сенсорів для демпфірування та виявлення інших мод коливань. При повному покритті пластини сенсором і при резонансних коливаннях по першій моді (9) для випадку незалежних від температури властивостей п'єзоматеріалів і постійної інтенсивності поверхневого тиску формула (12) дає:

$$Q = \frac{(k_1^2 + p_1^2) w_{11} A}{k_1 p_1 v_{10}}. \quad (14)$$

Як відомо, у багатьох випадках залежність п'єзоконстанти  $d_{31}$  від температури може бути апроксимована ступінчатою функцією, коли до точки Кюрі вона постійна, і дорівнює нулеві для температур, що перевищують точку Кюрі. При цьому з формули (12) випливає, що  $Q \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow T_K$ . Таким чином, при досягненні температурою точки Кюрі  $T_K$  сенсор втрачає своє функціональне призначення через втрату матеріалом п'єзоефекту. Якщо температура дисипативного розігріву розраховується без врахування залеж-

ності властивостей матеріалу від температури, то прирівнюючи її точці Кюрі, одержимо вираз для критичного значення параметра механічного навантаження:

$$P_0 = \sqrt{\frac{C_0(B_1^2 + B_2^2)T_K}{C_1}}. \quad (15)$$

Якщо враховується тільки залежність від температури властивостей пасивного матеріалу, а властивості п'єзоматеріалу залежать від осередненої по площі температури, то з представлених вище формул одержуємо, що для короткозамкнутих електродів

$$K_{S1} = \frac{|V_S(\theta^0 C)|}{|V_S(20^0 C)|} = \frac{\gamma_{31}(\theta^0 C)}{\gamma_{31}(20^0 C)} \cdot \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}, \quad (16)$$

а для розімкнутих електродів

$$K_{S2} = \frac{\gamma_{33}(20^0 C)}{\gamma_{33}(\theta^0 C)} \cdot K_{S1}. \quad (17)$$

Якщо ж від температури залежать тільки властивості пасивного матеріалу, то

$$K_S = K_{S1} = K_{S2} = \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}. \quad (18)$$

Для розрахунку цих коефіцієнтів, які характеризують вплив дисипативного розігріву на показники сенсора, необхідно при заданому навантаженні розрахувати температуру дисипативного розігріву шляхом розв'язання представлених [4] кубічних рівнянь, знайти осереднену по площі температуру, розрахувати величини, які фігурують у коефіцієнтах  $K_{S1}$ ,  $K_{S2}$ , та побудувати графіки залежності цих коефіцієнтів від амплітуди механічного навантаження. Штрихові лінії відповідають випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, а суцільні – випадку, коли вони залежать від осередненої по площі температури. Як видно з цих графіків, при врахуванні залежності властивостей пасивного матеріалу від температури у широкому діапазоні значень параметра навантаження показники сенсора погіршуються.

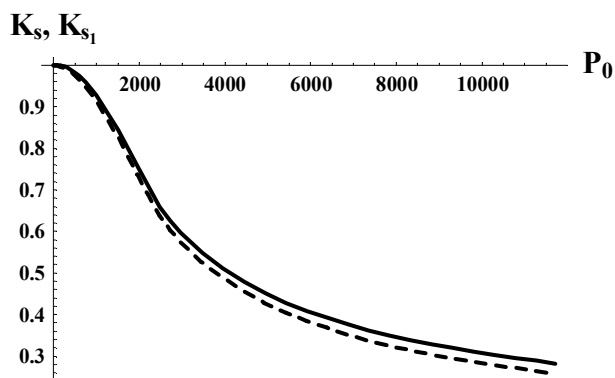


Рис. 2. Залежність  $K_{S1}$  від параметра навантаження

### Висновок

Розглянуто задачу про вплив температури дисипативного розігріву на показники сенсора при вимушених згинних резонансних коливаннях тонкої в'язкопружної шарнірно закріпленої прямокутної пластини, враховуючи залежність властивостей матеріалів від температури. Подано числові результати, що ілюструють вплив розмірів сенсора і температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора при резонансних коливаннях пластини.

### Список використаних джерел

1. *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F.* Mechanics of coupled fields in constructional elements. Electrotermoviscoelasticity. – V. 4. – Kyiv: Nauk. dumka, 1988. – 320 p. (in Russian).
2. *Karnaukhov V. G.* Thermal damage of polymeric constructional elements by monoharmonic deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – V. 40, № 6. – P. 30-70.
3. *Karnaukhov V. G., Michaylenko V. V.* Non-linear termomechanics of piezoelectric inelastic bodies by monoharmonic loading. – Zhitomir: ZhTTU, 2005. – 428 p. (in Russian).
4. *Karnaukhova T. V., Pyatetska O. V.* Fundamental relations of theory termoviscoelastic plates with distributed sensors // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – V. 45, № 6. – P. 100-112.

Надійшла до редколегії 17.05.13