УДК 539.3

Реут В. В.[1], к. ф.-м. н., доцент,
Роговский С. Т.[1], студент

Неразрезная полосовидная пластинка, ослабленная трещиной

Построено эффективное приближённое решение задачи о напряжённом состоянии неразрезной полосовидной пластинки, лежащей на n опорах и ослабленной прямолинейной трещиной. С помощью обобщённой схемы метода интегральных преобразований и метода трёх моментов задача сведена к сингулярному интегральному уравнению, которое решалось методом ортогональных многочленов. Указана скорость сходимости метода.

Ключевые слова: неразрезная пластинка, трещина, коэффициент интенсивности напряжений.

[1] Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, 65082, г. Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: reut@onu.edu.ua,
stanislav.rogovskiy@gmail.com

V. V. Reut[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
S. T. Rogowski[1], student

Continuous band-shaped plate weakened by a crack

The effective approximate solution of the problem of the stress state of the continuous band-shaped plate supported with n fixed bearings and weakened by a crack. With the help of the generalized scheme of the integral transformation method and the method of the three moments the problem was reduced to a singular integral equation, which is solved by the orthogonal polynomials method. The rate of convergence of method is shown.

Key Words: continuous plate, crack, stress intensity factor.

[1] Odessa National University named after I. I. Mechnikov, 65082, Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: reut@onu.edu.ua,
stanislav.rogovskiy@gmail.com

Введение

Задачи о напряжённом состоянии конструкций с дефектами типа трещин и жёстких включений рассматривались в работах многих отечественных и зарубежных учёных [1, 2]. При расчётах элементов конструкций в машиностроении и строительных конструкций часто возникают задачи о неразрезных пластинках с промежуточными опорами и с дефектами типа трещин. К таким задачам сводится также расчёт коробчатых оболочек и складчатых конструкций [3, 4]. В настоящей работе с помощью обобщённой схемы метода интегральных преобразований и метода трёх моментов построено приближённое решение для неразрезной полосовидной пластинки при наличии трещины, перпендикулярной краям пластинки. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений типа Пуанкаре – Коха [2], допускающей применение метода редукции.

Постановка задачи

Рассматривается задача о напряжённом состоянии неразрезной полосовидной пластинки $a \le x \le b$, $-\infty < y < \infty$, шарнирно опёртой по краям $x = a$, $x = b$. Вдоль прямых $x = a_k$ ($a_k = a + kl$, $k = \overline{1, n-1}$, $l = (b-a)/n$, $n \ge 2$) пластинка также шарнирно опирается на $n-1$ неподвижную опору. На интервале $\{x \in (-1; 1), y = 0\}$ между m-ой и $(m+1)$-ой опорами пластинка имеет трещину, к берегам которой приложен изгибающий момент интенсивности $f(x)$.

Такая задача математически эквивалентна задаче отыскания решения бигармонического уравнения Софи Жермен

$$\Delta^2 w(x, y) = 0, \quad a < x < b, \quad x \ne a_k \quad (k = \overline{1, n-1}),$$
$$-\infty < y < \infty, \quad (x, y) \notin (-1; 1) \times \{0\}, \qquad (1)$$

удовлетворяющего условиям шарнирного опирания по краям пластинки

$$x = a, b: \quad w = M_x = 0, \qquad (2)$$

условиям на опорах

$$x = a_k \ (k = \overline{1, n-1}): \ w = \langle \varphi_x \rangle = \langle M_x \rangle = 0, \qquad (3)$$

условиям затухания на бесконечности

$$y \to \pm\infty: \quad w,\ \varphi_y,\ M_y,\ V_y \to 0 \tag{4}$$

и условию на трещине

$$x \in (-1;1),\ y = 0:$$
$$\langle w \rangle = \langle V_y \rangle = 0, \quad M_y = f(x). \tag{5}$$

При этом в (1) – (5) w – прогиб пластинки; φ_x, φ_y – углы поворота; M_x, M_y – изгибающие моменты; V_x, V_y – обобщенные перерезывающие силы; $\langle ... \rangle$ – скачки соответствующих величин на указанных линиях.

Сингулярное интегральное уравнение

Введём неизвестную функцию

$$y = 0: \quad \chi(x) = \left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle. \tag{6}$$

Очевидно, $\chi(x) = 0$ $(|x| > 1)$.

Применяя к задаче (1) – (5) полное преобразование Фурье

$$w_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{i\lambda y} dy,$$
$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(x) e^{-i\lambda y} d\lambda \tag{7}$$

и обобщённую схему метода интегральных преобразований, следуя [2], сведем данную задачу к сингулярному интегральному уравнению

$$\int_{-1}^{1} K^*(x, \xi)\chi(\xi)d\xi = f(x) \quad (-1 < x < 1), \tag{8}$$

где

$$K^*(x, \xi) = \mathbb{M}_y\, \mathbb{M}_\eta\, G^*(x, y, \xi, \eta)\Big|_{y=\pm 0,\ \eta=0}.$$

Здесь $G^*(x, \xi, y, \eta)$ – двумерная функция Грина краевой задачи (1) – (4), $\mathbb{M}_y$, $\mathbb{M}_\eta$ – дифференциальные операторы

$$\mathbb{M}_y = -D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\ \mathbb{M}_\eta = -D\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right),$$

D – цилиндрическая жёсткость пластинки, ν – коэффициент Пуассона.

Как показано в [2], ядро интегрального уравнения (8) допускает представление

$$K^*(x, \xi) = -\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{4\pi} \frac{d^2}{dx^2} \ln|x - \xi| + K(x, \xi),$$

где $K(x, \xi)$ – бесконечно дифференцируемая функция.

В дальнейшем, так же, как и в [5], мы используем другое представление ядра $K^*(x, \xi)$. Функция $G^*(x, \xi, y, \eta)$ на интервале $a_m < x < a_{m+1}$ может быть определена как сумма прогиба $G(x, \xi, y, \eta)$ шарнирно опёртой пластинки $\{a_m < x < a_{m+1}, -\infty < y < \infty\}$ под действием сосредоточенной в точке (ξ, η) силы и прогиба пластинки от действия распределенных на её краях $x = a_m$, $x = a_{m+1}$ моментов интенсивности $\mu_m(y, \eta)$, $\mu_{m+1}(y, \eta)$, компенсирующих согласно методу трёх моментов [6] влияние остальной части пластинки:

$$G^*(x, \xi, y, \eta) = G(x, \xi, y, \eta) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[-\mu_m \frac{\partial G_\alpha}{\partial \xi}(x, a_m) + \right.$$
$$\left. +\mu_{m+1} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \xi}(x, a_{m+1}) \right] \cos\alpha(y - \eta) d\alpha,$$

где μ_m, μ_{m+1} – трансформанты Фурье компенсирующих моментов:

$$\begin{pmatrix} \mu_m \\ \mu_{m+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_\alpha}{\partial x}(a_m, \xi - a_m) \\ \dfrac{\partial G_\alpha}{\partial x}(a_{m+1}, \xi - a_m) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $G_\alpha(x, \xi)$ – трансформанта Фурье функции Грина $G(x, \xi, y, \eta)$,

$$A = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} -1 + T_0 Q_2 & -T_0 \\ -T_0 & -1 + T_0 Q_1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = (1 + T_0)^2 Q_1 Q_2 - T_0^2, \quad T_0 = \frac{T}{2B},$$

$$Q_1 = \frac{q_2^{m-1} - q_1^{m-1}}{q_2^m - q_1^m}, \ \ Q_2 = \frac{q_1^{m+2} q_2^n - q_2^{m+2} q_1^n}{q_1^{m+1} q_2^n - q_2^{m+1} q_1^n},$$

$$T = -\frac{l \operatorname{ch} \lambda l}{2 \operatorname{sh}^2 \lambda l} + \frac{1}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda l},$$

$$B = -\frac{l \operatorname{ch}^2 \lambda l}{2 \operatorname{sh}^2 \lambda l} + \frac{\operatorname{ch} \lambda l + \lambda l \operatorname{sh} \lambda l}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda l},$$

$$q_{1,2} = B/T \pm \sqrt{(B/T)^2 - 1}.$$

При этом $G(x, \xi, y, \eta)$ допускает представление

$$G(x,\xi,y,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_\alpha(x,\xi)\cos\alpha(y-\eta)d\alpha,$$

которое можно переписать, применяя конечное синус-преобразование Фурье по x, в виде

$$G(x,\xi,y,\eta)=\frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^\infty\frac{1+\lambda_k|y-\eta|}{4\lambda_k^3}\times$$
$$\times\sin\lambda_k(x-a_m)\sin\lambda_k(\xi-a_m),\quad \lambda_k=\frac{\pi k}{l}.$$

Таким образом,

$$K^*(x,\xi)=-\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2(b-a)}\times$$
$$\times\lim_{y\to0}\sum_{k=1}^\infty\lambda_k e^{-\lambda_k|y|}\sin\lambda_k(x-a)\sin\lambda_k(\xi-a)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big\{\rho_m(\xi-a_m)\big[\nu\psi_0(x-a_m)-(1-\nu)\lambda^2\psi_1(x-a_m)\big]+$$
$$+\rho_{m+1}(\xi-a_m)\big[\nu\psi_2(x-a_m)-(1-\nu)\lambda^2\psi_3(x-a_m)\big]\Big\}d\lambda,$$

где $\rho_i(\xi)=\mathbb{M}_\eta\mu_i(\xi)$ ($i=m,m+1$) – функции, возникающие при применении метода трёх моментов и допускающие представление

$$\begin{pmatrix}\rho_m(\xi)\\ \rho_{m+1}(\xi)\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}\nu\psi_0(\xi)-(1-\nu)\lambda^2\psi_1(\xi)\\ \nu\psi_2(\xi)-(1-\nu)\lambda^2\psi_3(\xi)\end{pmatrix}.$$

При этом $\{\psi_i\}_{i=0}^3$ – фундаментальная базисная система решений следующей краевой задачи:

$$L^2u=F(x),\quad a_m<x<a_{m+1}\quad(Lu=u''-\lambda^2u);$$
$$x=0,l:\quad u=Lu=0,$$

имеющая вид

$$\psi_0(x)=-L\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_m)=\frac{\operatorname{sh}\lambda(a_{m+1}-x)}{\operatorname{sh}\lambda l},$$

$$\psi_1(x)=-\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_m)=$$
$$=-\frac{l\operatorname{ch}\lambda l}{2\lambda\operatorname{sh}^2\lambda l}\operatorname{sh}\lambda(a_{m+1}-x)+\frac{(l-x)\operatorname{ch}\lambda(a_{m+1}-x)}{2\lambda\operatorname{sh}\lambda l},$$

$$\psi_2(x)=L\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_{m+1})=\frac{\operatorname{sh}\lambda(x-a_m)}{\operatorname{sh}\lambda l},$$

$$\psi_3(x)=\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(x,a_{m+1})=$$
$$=-\frac{l\operatorname{ch}\lambda l}{2\lambda\operatorname{sh}^2\lambda l}\operatorname{sh}\lambda(x-a_m)+\frac{(x-a_m)\operatorname{ch}\lambda(x-a_m)}{2\lambda\operatorname{sh}\lambda l}$$

и обладающая свойством

$$L\psi_1=\psi_0,\quad L\psi_3=\psi_2.$$

Приближённое решение

Решение интегрального уравнения (8) будем искать с помощью метода ортогональных многочленов [2] в виде ряда по многочленам Чебышева второго рода

$$\chi(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^\infty\chi_kU_k(x),\qquad(10)$$

где χ_k – коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Подставляя (10) в (8), получим

$$\sum_{k=0}^\infty\chi_k\int_{-1}^1K^*(x,\xi)\sqrt{1-\xi^2}U_k(\xi)d\xi=f(x)\quad(|x|<1).$$

Умножив последнее равенство на функцию $\sqrt{1-x^2}\,U_n(x)$ и проинтегрировав по переменной x в пределах от -1 до 1, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^\infty A_{kn}\chi_k=f_n\quad(n=\overline{0,\infty}).\qquad(11)$$

При этом

$$A_{kn}=A_{kn}^{(1)}+A_{kn}^{(2)},$$

где

$$A_{kn}^{(1)}=-\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2(b-a)}\sum_{i=1}^\infty\lambda_iT_{ki}T_{ni},$$

$$T_{ki}=\int_{-1}^1\sqrt{1-\xi^2}U_k(\xi)\sin\lambda_i(\xi-a)d\xi.$$

Как следует из формул 7.354 [7],

$$T_{ki}=\pi i(k+1)J_{k+1}(\pi/(b-a))\sin\left(\frac{\pi}{2}k-\frac{\pi i}{b-a}a\right).$$

Кроме того,

$$A_{kn}^{(2)}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{m+1}\int_0^\infty I_{ki}(\lambda)P_{ki}(\lambda)d\lambda.$$

Здесь $I_{ki}=\int_{-1}^1\rho_k(\xi)\sqrt{1-\xi^2}U_i(\xi)d\xi$ – решение системы линейных алгебраических уравнений, аналогичной (9):

$$\begin{pmatrix}I_{km}\\ I_{k,m+1}\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}P_{km}\\ P_{k,m+1}\end{pmatrix},$$

$$P_{km}=\int_{-1}^1\sqrt{1-\xi^2}U_k(\xi)\big[\nu\psi_0(x)-(1-\nu)\lambda^2\psi_1(x)\big]d\xi,$$

$$P_{k,m+1} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi) \left[\nu\psi_2(x) - (1-\nu)\lambda^2 \psi_3(x) \right] d\xi,$$

$$f_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sqrt{1-x^2}\, U_n(x) dx .$$

Как следует из формулы 1.4.8 [8], A_{kn} обладает асимптотикой

$$A_{kn} = -\pi^2[(n+1)/2]\delta_{kn} + O(e^{-\omega(k+n)}),\ k+n \to \infty,$$

где ω – некоторая постоянная, а δ_{kn} – символ Кронекера.

Таким образом, полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений является системой Пуанкаре – Коха [2] и допускает численное решение методом редукции. При этом решение системы (11) $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ убывает при $k \to \infty$ экспоненциальным образом, что обеспечивает хорошую сходимость метода.

Как показано в [2], коэффициент интенсивности напряжений вблизи концов трещины определяется по формуле

$$K_{\text{I}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k ,$$

причём в силу вышесказанного

$$\left| K_{\text{I}} - K_{\text{I}}^{(N)} \right| = O(e^{-N}),\quad N \to \infty,$$

где $K_{\text{I}}^{(N)}$ – приближённое значение коэффициента интенсивности для размерности $N+1$ редуцированной системы уравнений (11).

Заключение

Найдено эффективное приближённое решение задачи для трещины в неразрезной полосовидной пластинке. Получена оценка скорости сходимости метода. Следует отметить, что этим способом можно построить решение и для произвольно ориентированной трещины.

Список использованных источников

1. *Ulitko A. F.* The vector's expansion in the space elasticity theory. – Kiev: Akademperiodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
2. *Popov G. Ya.* Concentration of Elastic Stresses Near Stamps, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements. – Moscow: Nauka, 1982. – 344 p. (in Russian).
3. *Grishin V. A., Popov G. Ya., Reut V. V.*, Analysis of box-like shells // J. Appl. Math. Mech. – 1980. – V. 44, No 1. – P. 151-160. (in Russian).
4. *Grishin V. A., Reut V. V.* The stressed state of a box-like shell reinforced by a pair of symmetric inclusions parallel to the edge of the shell // J. Appl. Math. Mech. – 1995. – V. 59, No 5. – P. 817-820. (in Russian).
5. *Reut V. V., Rogovskiy S. T.* The influence function for a continuous band-shaped plate // Bulletin of Odessa National State University: Mathematics and Mechanics. – 2012. – V. 17, No 3(15). – P. 126-133. (in Russian).
6. *Love A. E. H.* A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity. – Cambridge: Cambridge University Press, 1927. – 675 p. (in Russian).
7. *Gradsteyn I. S., Ryzhik I. M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Products. 4th edition. – Moscow: Phys. math. lit., 1963. – 1100 p. (in Russian).
8. *Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Integrals and Series. Special Functions. – Moscow: Nauka, 1983. – 771 p. (in Russian).

Поступила в редколлегию 31.03.13