УДК 539.3

Сидорчук О. А.[1], аспірант,
Черняков Ю. А.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Шнейдер В. П.[1], к. ф.-м. н.

Вплив текстури на пластичне деформування

Розглядається питання формування пластичної анізотропії металлів за рахунок утворення кристалографічної текстури. Запропоновано варіант теорії мікродеформації, в якому враховано вплив текстури на пластичне деформування. В межах цього варіанту побудовані визначальні співвідношення початково анізотропного матеріалу. Показано, яким чином початкову анізотропію можна пов'язати з текстурою метала. Розглянуто приклад використання умови Хілла в теорії мікродеформації.

Ключові слова: початкова анізотропія, кристалографічна текстура, умова пластичності Хілла.

[1] Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
49000, м. Дніпропетровськ, просп. Гагаріна, 1
e-mail: shneider_vova@mail.ru

O. A. Sidorchuk[1], PhD student,
Yu. A. Chernyakov[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. P. Shneider[1], PhD (Phys.-Math.)

The Influence Of Texture On Plastic Deformation

The question of the formation of plastic anisotropy of metals at the expense of the formation of crystallographic texture is considered. A version of the theory of microdeformation, which takes into account the influence of the texture on plastic deformation is suggested. Under this option, the defining relationships of initially anisotropic material are constructed. It is shown, how the initial anisotropy can be associated with the texture of metal. The example of application of Hill condition in the microdeformation theory is considered.

Key Words: initial anisotropy, crystallographic texture, Hill condition of plasticity.

[1] Dnepropetrovsk National University of Oles Gonchar, Gagarina, 72, Dnepropetrovsk, 49010
e-mail: shneider_vova@mail.ru

1. Введение

В последнее десятилетие в литературе активно исследуется вопрос о развитии пластической анизотропии в поликристаллах, связанной с образованием текстуры в материале. Это исследование базируется на физических механизмах пластической деформации в кристаллах, основанных на скольжении и двойниковании, и процедурах усреднения по большому количеству зерен. Поскольку в моделях поликристалла можно определить вращение решетки каждого отдельного зерна, то представляется возможным проследить развитие текстуры в материале, что делает этот подход очень привлекательным. Однако его затруднительно применять для решения прикладных задач, в частности, при моделировании процессов обработки металла давлением, поскольку требует много времени для проведения вычислений.

В настоящем статье предлагается вариант теории микродеформации [1-3], в котором допускается наличие текстуры (неравномерное распределение направлений ориентационных тензоров), которая приводит к анизотропии материала. В качестве примера детально исследуется случай начальной анизотропии, отвечающей условию текучести Хилла [4], который часто используется для моделирования анизотропии, возникающей в прокатных листах.

2. Разрешающие уравнения теории

В теории пластичности, учитывающей микродеформации, элементарный представительный объем задается в виде некоторой совокупности N взаимосвязанных зерен. Однородное напряженно-деформированное состояние зерна с номером n определяется микронапряжениями $\boldsymbol{\sigma}_n$ и микродеформациями $\boldsymbol{\varepsilon}_n$. При этом микрочастица с номером n идентифицируется ориентационным тензором $\boldsymbol{\alpha}_n \in \Omega$, связанным с кристаллической структурой, и определяющим предпочтительное направление однородной пластической деформации зерна подобно системам скольжения в кристаллах. В рассмотренных ранее вариантах теории $\boldsymbol{\alpha}_n \in \Omega$ принимался направляющим девиатором или тензором ($\boldsymbol{\alpha}_n : \boldsymbol{\alpha}_n = 1$) и, кроме того, все направления распределялись равномерно в девиаторном пространстве. В этом случае, как показано в работах [1-3], приходим к первоначально изотропному материалу и к начальному условию пластичности в форме Губера – Мизеса. В случае, когда поликристалл имеет определенную текстуру, то распределение направлений становится неравномерным, что приводит к изменению условий нормировки ориентационного тензора.

Учитывая указанные особенности обобщенного варианта теории микродеформации, представим разрешающие уравнения теории в следующем виде

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p = \dot{\lambda}_n \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \tau_0 \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\alpha}_n : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n = 1, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = \dot{\boldsymbol{\tau}}_n + \dot{\boldsymbol{\rho}}_n, \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p), \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{n=1}^{N} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p, \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_m = \sum_{n=1}^{N} R_{mn} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p, \tag{5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = a(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \tag{6}$$

Здесь $\dot{\boldsymbol{\tau}}_n$ и $\dot{\boldsymbol{\rho}}_n$ – скорость изменения диссипативной и «упругой» составляющих сопротивления пластическим деформациям, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор макронапряжений, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор скорости макродеформации, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ – тензор скорости пластической макродеформации, $\mathbf{G}$ – тензор четвертого ранга, определяющий матрицу упругой жесткости поликристалла, τ_0 – локальный предел текучести n-го зерна, $\dot{\lambda}_n$ ($\dot{\lambda}_n = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pn} : \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pn}}$) – интенсивность скорости микропластической деформации, R_{mn} – матрица влияния, a – константа материала.

Записанные выше соотношения (1) имеют место при активном микропластическом деформировании, которое определяется условиями Куна – Такера:

$$\boldsymbol{\tau}_n : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n - \tau_0 \le 0, \quad \dot{\lambda}_n > 0,$$

$$[\boldsymbol{\tau}_n : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n - \tau_0]\dot{\lambda}_n = 0. \tag{7}$$

В дальнейшем будет использоваться простейшее представление для матрицы влияния

$$R_{mn} = R_1 \delta(1 - \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n) + R_2 \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n + $$
$$+ R_3 + R_4 \delta(1 + \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n), \tag{8}$$

где $\delta(0) = 1$, а в остальных точках $\delta(x) = 0$.

Умножая правую и левую часть уравнения (6) скалярно на $\mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n$ и подставляя в полученное соотношение уравнения (2), (4) и (5), получаем (с учетом симметричности тензоров) для частиц, которые деформируются пластически

$$(R_1 + a)\dot{\lambda}_n + R_3 \dot{\Lambda} = \dot{\mathbf{r}} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n, \tag{9}$$

где обозначено

$$\dot{\Lambda} = \sum_{n=1}^{N} \dot{\lambda}_n, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (R_2 - a)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p. \tag{10}$$

Решение (9) имеет вид

$$\dot{\lambda}_n = \frac{1}{R_1 + a}\left[\dot{\mathbf{r}} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha}_n - \frac{R_3}{R_1 + a - R_3 \omega} \dot{\mathbf{r}} : \mathbf{A} : \mathbf{F}\right] \tag{11}$$

и ω – суммарное количество зерен, в которых имеет место пластическое деформирование и

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_n. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (4), приходим к определяющим соотношениям теории микродеформации

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \mathbf{G}_p : \mathbf{A} : \dot{\mathbf{r}}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{G}_p = \frac{1}{R_1 + a}\left(\mathbf{G}_1 - R_3 \omega \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}\right), \quad \mathbf{G}_1 = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{\alpha}_n. \tag{14}$$

Легко показать, что начальное условие текучести теории микродеформации (1) – (6) представляется в виде

$$\mathbf{s} : \mathbf{A} : \mathbf{s} = \tau_0^2. \tag{15}$$

Построим девиатор четвертого ранга $\mathbf{A}_0$ такой, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 : \mathbf{A}_0$ или $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}^{1/2}$ и введем новые переменные

$$\boldsymbol{\alpha}'_n = \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'_p = \mathbf{A}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{A}_0 : \dot{\mathbf{r}}. \tag{16}$$

Полученный таким образом девиатор $\boldsymbol{\alpha}'_n$ будет направляющим $\boldsymbol{\alpha}'_n : \boldsymbol{\alpha}'_n = 1$ и соотношения (1) в штрихованных переменных примут вид

$$\mathbf{A}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p = \dot{\lambda}_n \boldsymbol{\alpha}'_n , \quad \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\tau}_n = \tau_n \boldsymbol{\alpha}'_n . \tag{17}$$

Если теперь умножить на $\mathbf{A}_0$ правую и левую часть (13), то получим

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'_p = \mathbf{G}'_p : \dot{\mathbf{r}}', \tag{18}$$

где

$$\mathbf{G}'_p = \frac{1}{R_1 + a}\left(\mathbf{G}'_1 - R_3 \Omega \mathbf{F}' \otimes \mathbf{F}'\right),$$

$$\mathbf{G}'_1 = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}'_n \boldsymbol{\alpha}'_n , \quad \mathbf{F}' = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}'_n . \tag{19}$$

Легко установить, что определяющие соотношения в штрихованных переменных совпадают с соотношениями для изотропного материала. Таким образом, если в модели с начальной анизотропией перейти к штрихованным переменным по формулам (17), то в искаженном девиаторном пространстве мы приходим к изотропному материалу с матрицей касательной жесткости, которая определяется по первой из формул (19).

3. Приложение к анизотропной функции Хилла

Рассмотрим в качестве примера деформацию стальных прокатных листов в условиях плоского напряженного состояния. Листы, как известно, имеют различные свойства в трех взаимно ортогональных направлениях: 1 – направление прокатки, 2 – поперек прокатки и 3 – перпендикулярно листу. Введем декартовую систему координат, направляющие оси которой совпадают с осями анизотропии $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ и матрицу поворотов четвертого порядка, которая определяет изменения ориентационных тензоров $\boldsymbol{\mu}_n$ по отношению к изотропному случаю. Ориентационный тензор считается связанным с кристаллической структурой зерна и в силу этого при возникновении текстуры он может быть представлен, как

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = A_1 \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1 + A_2 \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2 + \\ + A_3 \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2 + A_4 \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 .\end{aligned} \tag{20}$$

В таком случае начальное условие пластичности (15) примет вид

$$A_1 s_{11}^2 + A_2 s_{22}^2 + A_3 s_{11} s_{22} + A_4 s_{12}^2 = \tau_0^2 \tag{21}$$

или через компоненты тензора напряжений

$$(4A_1 + A_2 - 2A_3)\sigma_{11}^2 + (A_1 + 4A_2 - 2A_3)\sigma_{22}^2 -$$
$$-(4A_1 + 4A_2 - 5A_3)\sigma_{11}\sigma_{22} + 9A_4\sigma_{12}^2 = 9\tau_0^2 .$$

Если ввести обозначения

$$H = (2A_1 + 2A_2 - (5/2)A_3)/9\tau_0^2 ,$$
$$G + H = (4A_1 + A_2 - 2A_3)/9\tau_0^2 ,$$
$$F + H = (A_1 + 4A_2 - 2A_3)/9\tau_0^2 ,$$
$$N = A_4 \big/ (2\tau_0^2),$$

то из (21), очевидным образом, приходим к анизотропному критерию текучести Хилла [4], который имеет вид

$$\sqrt{(G+H)\sigma_{11}^2 + (F+H)\sigma_{22}^2 - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + 2N\sigma_{12}^2} - 1 = 0 , \tag{22}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений и F, G, H, N – постоянные характеристики анизотропии, которые могут быть выражены через пределы текучести в соответствующем направлении, как и в работе [4]:

$$\begin{aligned} 2G &= \frac{1}{(\sigma_x^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_y^Y)^2} + \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \\ 2F &= \frac{1}{(\sigma_y^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_x^Y)^2} + \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \\ 2H &= \frac{1}{(\sigma_x^Y)^2} + \frac{1}{(\sigma_y^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \\ 2N &= \frac{1}{(\sigma_{xy}^Y)^2} = \frac{1}{(\sigma_{45}^Y)^2} - \frac{1}{(\sigma_B^Y)^2}, \end{aligned} \tag{23}$$

где σ_x^Y, σ_y^Y, σ_{45}^Y – пределы текучести при растяжении в продольном, поперечном и диагональном, по отношению к направлению прокатки, направлениях; σ_{xy}^Y – напряжение текучести при сдвиге, и σ_B^Y – напряжение текучести при двухосном растяжении.

На основании формулы (16), находим

$$A^0_{1111} = \sqrt{G+H}, \quad A^0_{2222} = \sqrt{F+H},$$
$$A^0_{1122} = \sqrt{H}, \quad A^0_{1212} = \sqrt{N}. \tag{24}$$

Таким образом, текстура, которая вызывает введенную выше деформационную анизотропию, определит

$$\alpha'_{11} = A^0_{1111}\alpha_{11} + A^0_{1122}\alpha_{22},$$
$$\alpha'_{22} = A^0_{2211}\alpha_{11} + A^0_{2222}\alpha_{22}, \tag{25}$$
$$\alpha'_{12} = A^0_{1212}\alpha_{12}.$$

Остальные направления остаются неизменными. Записанные формулы (25) позволяют определить кристаллографическую текстуру, приводящую к начальной анизотропии.

Выводы

Полученные в работе результаты позволяют в рамках теории микродеформации по известной матрице первоначальной анизотропии построить начальную текстуру и, наоборот, по известной текстуре установить начальную анизотропию. Приведен пример построения текстуры соответствующей условию пластичности Хилла [5].

Список використаних джерел

1. *Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A.* Theory of plasticity, taking into account microstrain // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. – 1985. – **284**. – No. 4. – P. 821-823. (in Russian).
2. *Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V., Chernyakov Yu. A.* Theory of plasticity and creep, taking into account microstrain // Applied Mechanics and Mathematics. – 1986. – **50**. – No. 6. – P. 890-897.
3. *Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A.* Theory of plasticity, taking into account microstresses // Advances in Mechanics. – 1992. – **15.** – No. 3-4. – P. 3-39.
4. *Hill R.* A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. 1948, Proc. R. Soc. Lond. – **A 193**. – P. 281-297.
5. *Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V.* Theory of plasticity, taking into account residual microstresses Applied Mechanics and Mathematics. 1958. – **XXII**. – No. 1. – P. 78-89.
6. *Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I.* About the influence of the initial microstresses on macroplastic deformation of polycrystals // Applied Mechanics and Mathematics. – 1968. – **32.** – No. 5. – P. 908-922.
7. *Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I.* On the accounting of microstresses in the theory of plasticity // Mechanics of Solids. – 1968. – No. 3. – P. 82-91.
8. *Kroner E.* Zur plastischen Verformung des Vielkristalls // Acta Metallurgica. – 1961. – **9** (2). – S. 155-191.
9. *Ilyushin A. A.* Questions of the general theory of plasticity // Applied Mechanics and Mathematics. – 1963. – **24**. – No. 3. – P. 399-411.
10. *Taherizadeh A., Green D.E., Ghaei A., Yoon J.-W.* A non-associated constitutive model with mixed iso-kinematic hardening for finite element simulation of sheet metal forming // International Journal of Plasticity. – 2010. – **26**. – P. 288-309.

Надійшла до редколегії 31.03.13