УДК 539.3

Сулим Г. Т.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Онишкевич В. М.[2], к. ф.-м. н., доц.

Взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором при теплоутворенні на ділянці контакту

Розглянуто осесиметричну контактну задачу про втискування циліндричного штампа, що обертається, у пружний півпростір з урахуванням теплоутворення на ділянці контакту. Розв'язок задачі термопружності для півпростору отримано за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля, а задачу теплопровідності для циліндра розв'язано методом прямих. Враховано можливість існування зон відриву півпростору від штампа із зміненим термоопором. Отримано розрахункові формули для температурних полів, теплових потоків та контактних напружень у взаємодіючих тілах.

Ключові слова: неідеальний контакт, термічна проникливість, контактні напруження.

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
[2] Національний лісотехнічний університет України, 79057, м. Львів, вул. Генерала Чупринки, 103
e-mail: vlodkoo@meta.ua

G. T. Sulym[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. M. Onyshkevych[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Interaction between a rigid cylinder and elastic haf-space subject to heat generation on the contact area

The axisymmetrical contact problem of pressure of the rotating cylindrical punch into an elastic half-space with heat generation on the contact area is considered. Solution of the problem of thermoelasticity for a half-space is obtained by means of the Hankel integral transformation and heat conduction problem for a cylinder is solved of the method of straight lines. The existence of the different half-space separation zones from the punch is established. The thermal fields, heat flows and contact stresses in the interacting bodies are determined.

Key Words: non-ideal contact, thermal resistance, contact stresses.

[1] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
[2] National Forestry University of Ukraine, 79057, L'viv, General Chuprynka str., 103
e-mail: vlodkoo@meta.ua

Вступ

Дослідження з контактної взаємодії в термопружності розпочалося у працях [1, 2], але у них та більшості інших публікацій не бралося до відома випинання основи і, як наслідок, цілком можливе відставання деяких ділянок штампа від основи. Задачу неповного контакту плоскої основи штампа з пружним півпростором вперше було розглянуто у [3] за спрощених крайових умов. Пізніше дослідження цієї тематики знайшло продовження, наприклад, у [4, 5]. У [6] було вперше з'ясовано, що причиною термомеханічного розшарування тіл може бути ділянка недосконалого теплового контакту.

Постановка задачі

Розглядається жорсткий циліндричний штамп радіусу a і висоти H, який, обертаючись з кутовою швидкістю ω, втискується силою P в пружний півпростір. Тертя між взаємодіючими тілами спричиняється до утворення теплових потоків, направлених у півпростір і штамп. Верхній торець циліндра піддається конвективному нагріванню чи охолодженню, між бічними поверхнями і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона, через незавантажену поверхню півпростору відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Його температуру вважаємо нульовою, напружено-деформований і температурний стан контактуючих тіл – незалежним від кутової координати.

З урахуванням цього для розв'язання задачі необхідно зінтегрувати систему рівнянь

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + k\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial r}, \quad \Delta u_z + k\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial r^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

де $k = (\lambda + \mu)/\mu = 1/(1 - 2\nu)$; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; ν – коефіцієнт Пуассона; λ, μ – коефіцієнти Ламе; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розши-

© Г. Т. Сулим, В. М. Онишкевич, 2013

рення. При цьому треба врахувати температурні крайові умови

$$z=0: \quad \partial t^{(1)}/\partial z=\gamma_0 t^{(1)}, \ r\le a; \tag{3}$$

$$r=a: \quad \partial t^{(1)}/\partial r=-\gamma_a t^{(1)}, \ z\le H; \tag{4}$$

$z=H$:

$$\lambda^{(1)}\partial t^{(1)}/\partial z-\lambda^{(2)}\partial t^{(2)}/\partial z=-f_T\omega r\sigma_z(r), \ r<a; \tag{5}$$

$$\lambda^{(2)}\partial t^{(2)}/\partial z+\lambda^{(1)}\partial t^{(1)}/\partial z=h\left(t^{(2)}-t^{(1)}\right), \ r<a; \tag{6}$$

$$\partial t^{(2)}/\partial z=\gamma_H t^{(2)}, \quad r>a \tag{7}$$

та силові крайові умови

$$z=H: \quad u_z=f, \quad r<a; \tag{8}$$

$$\sigma_z=0, \quad r>a; \tag{9}$$

$$\tau_{rz}=0, \quad r<\infty \tag{10}$$

у разі заданих γ_0, γ_a, γ_H – коефіцієнтів теплообміну відповідно між верхнім торцем циліндра, бічними поверхнями циліндра, незавантаженою поверхнею півпростору з одного боку і зовнішнім середовищем з іншого, коефіцієнта теплопроникності контакту h, величини осідання штампа f, коефіцієнтів теплопровідності циліндра і півпростору $\lambda^{(i)}$ ($i=1$ відноситься до циліндричного штампа, $i=2$ – до півпростору).

Розв'язок задачі для циліндра

Використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію рівняння теплопровідності для циліндра і крайових умов (3), (4) за безрозмірною радіальною координатою $\rho=r/a$, розв'язок задачі для циліндра будується методом прямих в області $G=\{0\le\rho\le1;\ 0\le\zeta\le1\}$, де $\zeta=z/H$ і зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt_i^{(1)}}{d\zeta}=\tilde t_i^{(1)}, \quad i=\overline{1,N};$$

$$\frac{d\tilde t_1^{(1)}}{d\zeta}=\frac{4H^2}{a^2\Delta\rho^2}\left(t_1^{(1)}-t_2^{(1)}\right);$$

$$\frac{d\tilde t_i^{(1)}}{d\zeta}=\frac{H^2}{a^2\Delta\rho^2}\left(-\frac{2i-3}{2(i-1)}t_{i-1}^{(1)}+2t_i^{(1)}-\frac{2i-1}{2(i-1)}t_{i+1}^{(1)}\right)$$

$$i=\overline{2,N-1};$$

$$\frac{d\tilde t_N^{(1)}}{d\zeta}=-\frac{2H^2}{a^2\Delta\rho^2}\left(t_{N-1}^{(1)}-t_N^{(1)}\right)+\frac{H^2\gamma_a}{a}\left(1+\frac{2}{\Delta\rho}\right), \tag{11}$$

де $\Delta\rho=\rho_i-\rho_{i-1}$, $i=\overline{1,N-1}$; N – кількість точок розбиття. Подаючи отриману систему у вигляді $d\vec\upsilon/d\zeta=B\vec\upsilon$, її розв'язок знаходимо за допомогою матричної експоненти [7] $\vec\upsilon(\zeta)=\exp(B\zeta)\vec d$, де $\vec d$ – сталий вектор, що визначається з (3) для кожної прямої.

Розв'язок задачі для півпростору

Застосовуючи до першого рівняння (1) інтегральне перетворення Ганкеля першого порядку, а до другого рівняння (1) і рівняння (2) при $i=2$ – нульового порядку, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок яких можна подати у вигляді [8]:

$$\bar t(\xi,\ \zeta_1)=B(\xi)\exp(-\xi\zeta_1),$$

$$\bar u_z(\xi,\zeta_1)=\frac{\Lambda B(\xi)}{2\xi}\left(1-\xi\zeta_1\right)\exp(-\xi\zeta_1)+$$

$$+\xi^2\left[kC_1(\xi)+2C_2(\xi)+k\xi\zeta_1C_2(\xi)\right]\exp(-\xi\zeta_1),$$

$$\bar\sigma_z(\xi,\zeta_1)=\mu\Lambda\xi\zeta_1B(\xi)\exp(-\xi\zeta_1)-$$

$$-2\mu\xi^3\left(kC_1(\xi)+C_2(\xi)+k\xi\zeta_1C_2(\xi)\right)\exp(-\xi\zeta_1),$$

$$\bar\tau_{rz}(\xi,\zeta_1)=-\mu\Lambda B(\xi)\left(1-\xi\zeta_1\right)\exp\left(-\xi\zeta_1\right)+2\mu\xi^3\times$$

$$\times\left[(k-1)C_2(\xi)-kC_1(\xi)-k\xi\beta\zeta_1C_2(\xi)\right]\exp(-\xi\zeta_1), \tag{12}$$

де

$$\zeta_1=z-H,\ \Lambda=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T=-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_T,$$

$B(\xi)$, $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ – невідомі функції.

Використовуючи формули обернення і задовольняючи силові крайові умови (8) і (9), у безрозмірних координатах $\rho=r/a$, $\eta=a\xi$ отримаємо при $\rho<1$:

$$\frac{1}{a^2}\int_0^\infty\eta\left[\theta_1\eta^2C_1(\eta)+\theta_3a^3\eta^{-1}C_3(\eta)\right]J_0(\eta\rho)d\eta=f;$$

при $\rho>1$:

$$\frac{1}{a^5}\int_0^\infty\eta\left[\sigma_1\eta^3C_1(\eta)+\sigma_3a^3C_3(\eta)\right]J_0(\eta\rho)d\eta=$$

$$=\sigma_z(\rho)H(1-\rho). \tag{13}$$

Температурні крайові умови (5) – (7) дадуть співвідношення

при $\rho<1$:

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\zeta}+\frac{\lambda^{(2)}}{a^3}\int_0^\infty\eta^2C_3(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=-af_T\omega\rho\sigma_z(\rho);$$

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\zeta}+ht^{(1)}=\frac{1}{a^2}\int_0^\infty\left(h+\frac{\lambda^{(2)}\eta}{a}\right)\eta C_3(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta;$$

при $\rho > 1$:

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \eta\left(\eta + a\gamma_H\right)C_3(\eta)J_0(\eta\rho)\,d\eta = \\ = \chi(\rho)H(1-\rho). \quad (14)$$

У цій системі рівнянь для зручності її розв'язування довизначено праві частини рівнянь при $\rho > 1$ фіктивними контактними напруженнями $\sigma_z(\rho)$ і температурою $\chi(\rho)$, які з огляду на властивості функції Гевісайда $H(\cdot)$ суті крайових умов не змінюють. Подамо ці функції у вигляді скінчених сум ряду Фур'є – Бесселя

$$\sigma_z(\rho) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\lambda_n \rho),$$

$$\chi(\rho) = b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} b_n J_0(\lambda_n \rho) \quad (15)$$

з наперед невідомими коефіцієнтами a_n та b_n. Після підстановки (15) у (13), (14) та використання формули обернення інтегрального перетворення Ганкеля отримаємо вирази для визначення невідомих функцій $C_1(\xi)$ і $C_3(\xi)$. Підставляючи ці вирази в систему (13), (14) і задовольняючи крайові умови (3) в рівновіддалених точках $\rho_i = (i-1)/(N-1)$, $i = \overline{1, N}$ отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $a_i, b_{i-1}, d_j, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, 2N}$, яку розв'язано методом Ґаусса. Повертаючись у формулах (12) в простір оригіналів та використовуючи обчислені значення коефіцієнтів, отримано вирази для температури і теплових потоків у контактуючих тілах та переміщень пружного півпростору.

Числові результати

При числових розрахунках було отримано розподіл контактних напружень, який за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії.

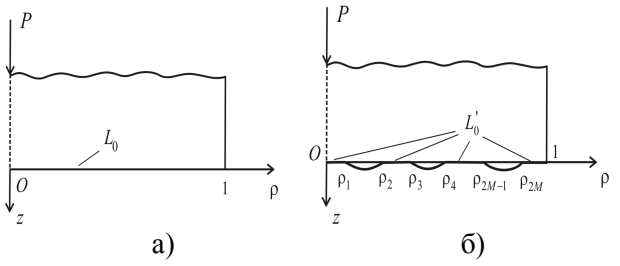
У першому випадку розраховані контактні напруження σ_z на всій ділянці $L_0 : \rho \in [0; 1]$ не є додатними (від'ємні або дорівнюють нулю). Це означає, що на всій цій ділянці штамп прилягає до основи (рис. 1, а), крайові умови (5), (6) і (8) виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточними. При цьому з умови рівноваги штампа обчислюється прикладена до нього сила, яка спричинила задане осідання f:

$$P = 2\pi a^2 \int_0^1 \sigma_z(\rho, 0)\rho\, d\rho = 2\pi a^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\lambda_n} J_1(\lambda_n),$$

де λ_n $(n = \overline{1, N})$ – нулі функції Бесселя нульового порядку.

Зазначимо, що на тих ділянках, де нормальні напруження дорівнюють нулю при виконанні умови $u_z = 0$, можна вважати, що існує дотиковий контакт. У подальшому відсутністю контакту вважатимемо умову, коли поверхня штампа перебуває на певній відстані від поверхні здеформованого півпростору. Відтак такі ділянки, де $\sigma_z = 0$, $u_z = 0$ будемо відносити до області контакту.

У другому випадку на певній ділянці $L_1 = \bigcup_{m=1}^{M} L^{2m}$, яка складається з сукупності M проміжків $L^{2m} = [\rho_{2m-1}; \rho_{2m}]$ $(0 = \rho_0 \le \rho_1$, $\rho_i < \rho_{i+1}$, $\rho_{2M} \le \rho_{2M+1} = 1$; $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, 2M}$), розраховані значення напруження σ_z мають строго додатне значення. Це би означало, що на цих ділянках якісь зусилля мали би притягувати штамп до півпростору, а відтак отриманий розв'язок не є коректним розв'язком контактної задачі, оскільки існує велика ймовірність того, що штамп контактує з півпростором на ділянці $L_0' = L_0 - L_1 = \bigcup_{m=0}^{M} L^{2m+1}$, а на L_1 контакт відсутній (рис. 1, б).



а) б)

Рис. 1. Схема контактної взаємодії: а) повний контакт (область контакту $L_0 : \rho \in [0; 1]$); б) неповний контакт (область контакту $L_0' = L_0 - L_1$)

Тут $L^1 = [\rho_0; \rho_1)$, $L^{2m+1} = (\rho_{2m}; \rho_{2m+1})$ $(m = \overline{1, M-1})$, $L^{2M+1} = (\rho_{2M}; \rho_{2M+1}]$, причому проміжки L^1, L^{2M+1} кожен зокрема чи обидва разом можуть дорівнювати нулю. Відтак треба змінити первісне формулювання крайових умов (5), (6), (8). Інші умови залишаються у незмінному вигляді. У нульовому наближенні вважатимемо, що справджується припущення про контакт штампа на L_0', а тому замість L_0 тепер треба брати L_0', а для лінії L_1 умо-

ва відсутності контакту (навіть дотикового) запишеться так:

$$\zeta_1 = 0,\ \rho \in L_1: \qquad \sigma_z = 0\,,\ \ u_z > f;$$

$$\lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial z = \lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial z,$$

$$\lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial z + \lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial z = h_0\left(t^{(2)} - t^{(1)}\right), \qquad (16)$$

де h_0 – коефіцієнт теплопроникності контакту на ділянці L_1.

Зазначена зміна крайових умов змушує розв'язувати основну систему рівнянь вже лише на проміжку L_0', а на ділянці L_1 – систему рівнянь, яка забезпечує виконання крайових умов (16). У цьому разі з умови рівноваги штампа прикладена до нього сила дорівнює

$$P = 2\pi\rho_1^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{a_n}{\lambda_n} J_1(\lambda_n) +$$

$$+ 2\pi(\rho_3 - \rho_2)^2 \sum_{n=1}^{N_3} \frac{a_n}{\lambda_n} J_1(\lambda_n) + \ldots$$

$$\ldots + 2\pi(1 - \rho_{2M})^2 \sum_{n=1}^{N_{2M+1}} \frac{a_n}{\lambda_n} J_1(\lambda_n).$$

Тут N_{2m+1} – кількість точок розбиття проміжків L^{2m+1} $(m = \overline{0, M})$, у яких значення контактних напружень не додатні.

Числові розрахунки здійснено для випадку, коли матеріал циліндра – сталь, а матеріал півпростору – алюміній, $\gamma_0 = \gamma_a = \gamma_H = 10\ \text{м}^{-1}$, $f_T = 0{,}01$, $f = 0{,}2$ мм, $\alpha_T = 22{,}9 \times 10^{-6}\ \text{К}^{-1}$, $h = 1000$ кВт/(м^{2}К), $\omega = 0{,}3\ \text{с}^{-1}$, $H = 0{,}3$ м, $a = 1$ м. За таких вхідних даних при використанні однакової для кожного проміжку розбиття L^i кількості точок розбиття $N_i = 20$ після шести ітерацій було отримано другий випадок (відставання штампа) з однозв'язною областю контакту $L_0' = L^1 = [0; \rho_1)$ при числовому значенні $\rho_1 \approx 0{,}65$. Відзначимо, що врахування теплоутворення на ділянці контакту суттєво впливає на результати: температура і теплові потоки в циліндрі та півпросторі збільшуються, з'являється їх чітко виражений максимум. Збільшення притискувальної сили спричиняє відповідне зростання шуканих величин, однак вертикальні переміщення границі півпростору зростають в напрямку, протилежному до дії сили (рис. 2). Крива 1 відповідає значенню сили P = 23 МН, а крива 2 – значенню 57 МН.

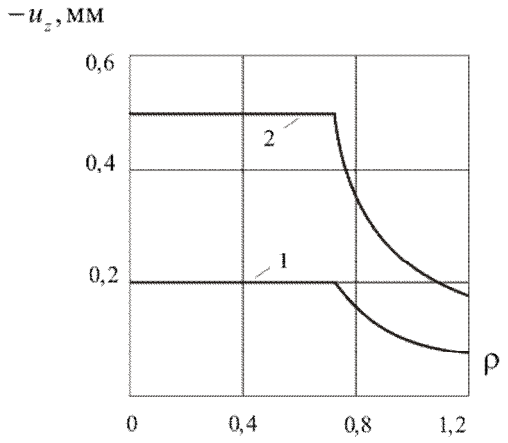


Рис. 2. Вертикальні переміщення границі півпростору

Список використаних джерел

1. *Borodachov N. M.* About solution of contact problem of thermoelasticity in the case of axis symmetry // Izv. AN SSSR, OTN. Mehanika i mashinostroyenie. – 1962. – № 5. – P. 86-90. (in Russian).
2. *George D. L.* The axisymmetric Boussinesq problem for a heat punch / D. L. George, I. N. Sneddon // J. Math. and Mech.– 1962.– **11**, № 5. – P. 665-689.
3. *Barber J. R.* Distribution of heat between sliding surfaces solids / J. R. Barber // J. Mech. Eng. Sci. – 1967. – **9**, № 5. – P. 351-354.
4. *Kulchytsky-Zhyhailo R.* Stress distribution in axi-symmetric contact problems with heat generation / R. Kulchytsky-Zhyhailo // J. Friction and Wear. – 2000. – **21**, № 3. – P. 238-245.
5. *Yevtushenko A. A.* Axi-symmetrical transient contact problem for sliding bodies with heat generation / A. A. Yevtushenko, R. D. Kulchytsky-Zhyhailo // Int. J. Solids Struct. – 1995. – **32**, № 16. – P. 2369-2376.
6. *Martyniak R. M.* Thermoelastic contact interaction of bodies with surface heatphysical nonhomogeneouses / Shvets R. N., Martyniak R. M. // Mat. met. i fiz.-meh. polya. – 1988. – **27**. – P. 23-28. (in Russian).
7. *Rakitskiy Yu. V., Ustinov S. M., Chernoruckiy I. G.* Numerical methods of solution of rigid systems. – Moscow: Nauka, 1979. – 208 p. (in Russian).
8. *Grylitskyi D. V., Shelestovskyi B. G.* Axi-symmetrical contact problems of thermoelasticity. – L'viv, Vyshcha shk., 1974. – 113 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 15.03.13