

УДК 539.3

Токовий Ю. В.¹, к. ф.-м. н.

Осесиметричні температурні напруження у пружному скінченному циліндрі за нагріву частини бічної поверхні

Запропоновано підхід до побудови аналітичного розв'язку осесиметричної задачі термопружності для суцільного циліндра скінченної довжини у випадку нагріву частини бічної поверхні. З використанням методу перехресної суперпозиції розв'язок задачі для напружень знайдено у вигляді сум рядів Фур'є та Бесселя – Діні. Для визначення коефіцієнтів цих рядів отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, для розв'язання якої застосовано модифікований метод редукції.

Ключові слова: скінченний циліндр, розривне навантаження, термонапруження.

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-Б
e-mail: tokovyuy@iapmm.lviv.ua

Вступ

Побудова розв'язків переважної більшості двота тривимірних крайових задач теорії пружності й термопружності зазнає ускладнення у випадку, коли крайові умови задано негладкими чи розривними функціями. Це пов'язано із повільним асимптотичним згасанням коефіцієнтів розвинень заданих на межі тіла функцій у ряди при використанні методу відокремлення змінних, що негативно позначається на ефективності отриманих розв'язків крайових задач, особливо для тіл скінченних розмірів з кутовими точками.

У цій статті розвинуто методіку побудови аналітичного розв'язку осесиметричної задачі термопружності для суцільного скінченного циліндра з теплоізолюваними торцями за нагріву бічної поверхні по рівновіддаленій від торців частині бічної поверхні. Уся поверхня циліндра є вільною від силових навантажень. У випадку безмежно довгого циліндра задачу про осесиметричний нагрів частини бічної поверхні розв'язано в [1] за сталого розподілу температурного поля у межах термічно навантаженої ділянки бічної по-

Yu. V. Tokovyuy¹, PhD (Phys.-Math.)

Axisymmetric temperature stresses in an elastic cylinder of finite length due to partial heating of its lateral surface

An approach for construction of an analytical solution to the axially symmetric thermoelasticity problem for a solid cylinder of finite length is presented for the case of partial heating of its lateral surface. By making use of the method of cross-wise superposition, the solution for stresses is constructed by decompositions into Fourier and Bessel – Dini series. For determination of the coefficients in these series, a infinite system of linear algebraic equations is obtained and then solved by means of an advanced reduction algorithm.

Key Words: finite cylinder, discontinuous loading, thermal stresses.

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, 79060, L'viv, 3-B Naukova st.
e-mail: tokovyuy@iapmm.lviv.ua

верхні. Для скінченного циліндра таку задачу із використанням методу суперпозиції розв'язано у роботі [2]. Для розв'язання отриманої у результаті застосування такого підходу нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь, яка відображає зв'язок наявних у виразах для шуканих компонент тензора напружень вільних сталих із крайовими умовами, використано алгоритм простої редукції, який не забезпечує прийнятної точності задоволення крайових умов для даної задачі внаслідок слабкого асимптотичного згасання відповідних коефіцієнтів розвинень крайових умов у ряди за радіальною та осьюовою координатами. Тут для подолання цієї проблеми використано алгоритм покращеної редукції, який базується на теорії лімітант та законі асимптотичних виразів Б. М. Кояловича і розвинутий в роботах А. Ф. Улітка [3]. Цей підхід враховує асимптотичну поведінку невідомих нескінченної алгебричної системи рівнянь і значно підвищує ефективність розв'язку. У випадку силової задачі такий підхід використано, зокрема, у роботах [4, 5].

Постановка задачі

Розглянемо пружний суцільний циліндр скінченної довжини $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq h$, віднесений до циліндричної системи координат (r, θ, z) . Тут r, z – безрозмірні радіальна та осьова координати, a та $2h$ – відповідно безрозмірні радіус та довжина твірної циліндра. Торці циліндра вважаємо теплоізолюваними

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h, \quad (1)$$

а на бічній поверхні підтримується температура, задана наступним законом:

$$T = \begin{cases} \tau(z), & z \in [-h_0, h_0], \\ 0, & z \in [-h, h] \setminus [-h_0, h_0], \end{cases} \quad r = a, \quad (2)$$

де $h_0 \leq h$, а функція $\tau(z)$ є гладкою та непарною. Ставиться задача визначення напруженого стану циліндра внаслідок стаціонарного розподілу температури, спричиненого крайовими умовами (1), (2) за відсутності зовнішніх зусиль на поверхні циліндра.

Побудова розв'язку

Внаслідок крайових умов (1), (2) розподіл температури і, як наслідок, шуканий напружений стан є симетричними відносно осі циліндра. Температурне поле знайдемо зі стаціонарного рівняння теплопровідності [6] у вигляді розвинення в ряд Фур'є

$$T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} T_n \cos k_n z, \quad (3)$$

де $\{T_0, T_n\} = \frac{1}{h} \int_0^{h_0} \tau(z) \{1, 2 \cos k_n z\} dz$, $k_n = n\pi/h$, $I_m(r)$ – модифікована функція Бесселя першого роду m -го порядку.

Для визначення напруженого стану циліндра внаслідок дії температурного поля (3) використаємо класичний підхід [6, 7], який полягає у поданні компонентів тензора напружень у вигляді двох складових

$$\sigma_\beta = \sigma_\beta^* + \sigma_\beta^{(T)}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^* + \sigma_{rz}^{(T)}, \quad \beta = \{r, \theta, z\}. \quad (4)$$

Складові з верхнім індексом (T) , спричинені градієнтом температури (3), знайдено з використанням потенціалу Папковича – Гудьєра у вигляді

$$\sigma_r^{(T)}/K = -T_0/2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} + \frac{k_n^2 r^2 - 2}{k_n r} \frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right) T_n \cos k_n z,$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(T)}/K &= -T_0/2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} - \frac{2}{k_n r} \frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right) T_n \cos k_n z, \\ \sigma_z^{(T)}/K &= -T_0 - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} + \frac{k_n r}{2} \frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right) T_n \cos k_n z, \\ \sigma_{rz}^{(T)}/K &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} + \frac{k_n r}{2} \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right) T_n \sin k_n z, \end{aligned} \quad (5)$$

де $K = \alpha E / (1 - \nu)$; ν, α – коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення.

Напруження (5) спричинюють виникнення зусиль на бічній поверхні та торцях циліндра. Задля забезпечення умов вільної від напружень поверхні циліндра, скористаємося поданням (4), взявши для складових, позначених зірочкою, крайові умови у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= -\sigma_r^{(T)}(a, z), & \sigma_{rz}^* &= -\sigma_{rz}^{(T)}(a, z), & r &= a, \\ \sigma_z^* &= -\sigma_z^{(T)}(r, \pm h), & \sigma_{rz}^* &= 0, & z &= \pm h. \end{aligned} \quad (6)$$

Для визначення цих складових розв'язку використаємо метод перехресної суперпозиції [6, 7]. Скористаємося виразом [7] бігармонічної функції Лява

$$\begin{aligned} \chi(r, z) &= B_0 z^3 + D_0 r^2 z + \chi_s + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j R_j(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 J_0(\lambda_j a)} + \\ &+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k_n^{-3} X_n S_n(r) \sin k_n z, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_s &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s_n}{k_n^3} \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \sin k_n z; \\ R_j(z) &= \left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{2\nu}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h}; \\ S_n(r) &= \left(2 \frac{\nu-1}{k_n} - a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)}; \end{aligned}$$

B_0, D_0, Y_j, X_n ($j, n = 1, 2, \dots$) – невідомі коефіцієнти; λ_j – додатні корені рівняння $J_1(\lambda a) = 0$; $J_0(r), J_1(r)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків, $s_n = (-1)^n T_n [k_n a / 2 + I_1(k_n a) / I_0(k_n a)]$. Вирази для компонентів тензора напружень встановимо із використанням (7) та співвідношень

$$\sigma_r^* = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_z^* = \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta}^* = \frac{\partial}{\partial z} \left(v \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \quad \sigma_{rz}^* = \frac{\partial}{\partial r} \left((1-v) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right).$$

Знайдені у такий спосіб дотичні напруження тотожно задовольняють умови (6) на повній поверхні циліндра, а радіальні та осьові напруження набувають вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= 6vB_0 - 2(1-2v)D_0 - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \left[\frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \frac{I_1(k_n r)}{k_n r I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z + \\ &+ h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h - \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ &- h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h - \frac{1-2v}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j r J_0(\lambda_j a)} + \\ &+ a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n} X_n \left[\left(k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} + 1 \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \right. \\ &\left. - \left(2 \frac{1-v}{k_n} + a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_1(k_n r)}{r I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z, \\ \sigma_z^* &= 6(1-v)B_0 + 4(2-v)D_0 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z - \\ &- h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(h \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{1}{\lambda_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - z \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ &+ a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[\left(\frac{2}{k_n} - a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right] \cos k_n z. \end{aligned} \quad (8)$$

Підстановкою виразів (8) у крайові умови (6), праві частини яких попередньо розвинуто у ряди Фур'є за осью та Бесселя – за радіальною координатою, приходимо до двох систем лінійних алгебричних рівнянь, перша з яких для елементарних частин напружень має вигляд

$$\begin{cases} 6vB_0 - 2(1-2v)D_0 = f_0, \\ 6(1-v)B_0 + 4(2-v)D_0 = g_0, \end{cases} \quad (9)$$

а друга є такою:

$$\begin{cases} X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = f_n^*, & n = 1, 2, \dots, \\ Y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = g_j^*, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

де

$$P_n = a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) - 2 \frac{1-v}{k_n^2}, \quad \Delta_j = \frac{h}{\lambda_j} \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{h^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j h},$$

$$f_0 = \frac{T_0}{2}, \quad g_0 = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T_n \left(1 + \frac{2}{k_n a} \frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)} \right),$$

$$f_n^* = \frac{(-1)^n k_n a T_n}{2} \left(\frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} - \frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)} \right),$$

$$g_j^* = - \frac{2\lambda_j^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n T_n}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}.$$

Побудова розв'язку системи рівнянь (9) не викликає ускладнень. Для розв'язання ж нескінченної системи рівнянь (10) скористаємося алгоритмом удосконаленої редукції [3, 6, 7], який ґрунтується на застосування закону асимптотичних виразів Б. М. Кояловича

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = G = \text{const} \neq 0.$$

Слід зауважити, що ефективність такого підходу залежить від швидкості згасання вільних членів у рівняннях системи (10), які виражаються через коефіцієнти розвинень крайових умов у відповідні ряди. Внаслідок розривності чи негладкості крайових умов таке асимптотичне згасання є доволі повільним, що суттєво ускладнює побудову розв'язку системи (10). Для подолання цієї проблеми скористаємось підходом [3-5], згідно з яким перейдемо до нових змінних

$$X_n = G + x_n + \frac{(-1)^n k_n I_1(k_n a) T_n}{2a I_0(k_n a)}, \quad Y_j = G + y_j, \quad (11)$$

де $x_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, $y_j = o(1)$, $j \rightarrow \infty$. Внаслідок підстановки (11) в систему (10) остання набуває вигляду

$$\begin{cases} x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4k_n^2 y_j}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2(1+v)G}{k_n^2} = \psi_n, \\ y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2 x_n}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2G}{\lambda_j^2} = 0, \\ (1+v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^4} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^4} + G \left(\frac{1+v}{90} h^4 + \frac{a^4}{192} \right) = \gamma, \end{cases} \quad (12)$$

де

$$\psi_n = (-1)^n \frac{1-v}{k_n^3 a} \frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)} T_n,$$

$$\gamma = \frac{1-v}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n T_n}{k_n^3} \frac{I_1(k_n a)}{I_0(k_n a)}.$$

Зауважимо, що вільні члени системи (12) згадують, принаймні, на порядок швидше, ніж у системі (10), внаслідок чого система (12) є регулярною і може бути розв'язаною з використанням алгоритму простої редукції, поклавши $x_n \equiv 0$ ($n > N$) та $y_j \equiv 0$ ($j > J$), де N та J – певні значення відповідних індексів. Після визначення наборів $\{x_1, \dots, x_N, 0, \dots\}$, $\{y_1, \dots, y_J, 0, \dots\}$ та сталої G із (12), на основі (11) знайдемо коефіцієнти напружень (8).

Числовий приклад

Розглянемо розрахунок напруженого стану циліндра $a = h = 1$ у випадку нагріву бічної поверхні (2), де 1) $\tau(z) = \tau_0 = \text{const}$ та 2) $\tau(z) = -3(z^2 - h_0^2)\tau_0/(2h_0^2)$ і $h_0 = 1/2$. Розподіли радіальних напружень за осьовою координатою наведено на рис. 1.

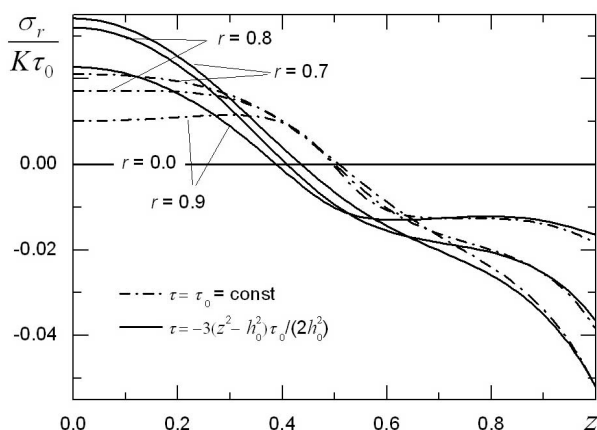


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень у циліндрі за осьовою координатою

Розраховані напруження задовольняють однорідні крайові умови і з віддаленням від бічної поверхні чинять розтяг у межах нагрітої ділянки $z \in [-h_0, h_0]$ та стиск за її межами. При цьому напруження поблизу серединного поперечного перерізу циліндра є більшими у випадку функції нагріву 2), яка забезпечує ту ж середню температуру нагріву, що й 1), однак є розподіленою нерівномірно і зростає при наближенні до середини нагрітої ділянки поверхні. Поблизу торців різниця між випадками 1) та 2) є незначною. Для радіусів менших за $r = 0,5$ розподіл напружень зберігається практично таким же, як і для вказа-

ного радіусу. Слід відзначити, що використання запропонованого підходу дозволило розрахувати напружений стан з похибкою 0,1% задоволення напруженнями (8) крайових умов (6) за $N = J = 5$.

Висновок

Методом удосконаленої редукції розв'язано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, до якої зводиться осесиметрична задача термопружності для суцільного циліндра скінченної довжини за негладкого та розривного температурного навантаження бічної поверхні. Використання такого підходу дозволяє здійснювати розрахунок напруженого стану у циліндрі з високою точністю задоволення крайових умов за застосування до розв'язання вказаної нескінченної системи алгоритму простої редукції з урахуванням невеликої кількості рівнянь та невідомих.

Список використаних джерел

1. Ignaczak J. Thermal stresses in a long cylinder heated in a discontinuous manner over the later surface // Arch. Mech. Stos. – 1958. – **10**. – P. 25-34.
2. Sundara Raja Iyengar K. T., Chandrashekhar K. Thermal stresses in a finite solid cylinder due to steady temperature variation along the curved and end surfaces // Int. J. Engng Sci. – 1967. – **5**, N 4. – P. 393-413.
3. Ulitko A. F. The vector's expansion in the spacial elasticity theory. – Kiev: Akadempriodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
4. Tokovyy Yu. V. Axisymmetric stresses in a finite-length elastic cylinder due to normal pressure uniformly distributed over a part of its lateral surface // Prykl. Probl. Mekh. Mat. – 2010. – N 8. – P. 144-151. (in Ukrainian).
5. Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, N 1. – P. 143-166.
6. Kovalenko A. D. Thermoelasticity: basic theory and applications. – Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969. – 251 p.
7. Meleshko V. V., Tokovyy, Yu. V., Barber J. R. Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – **176**, N 5. – P. 646-669.

Надійшла до редколегії 31.03.13