УДК 539.3

Флячок В. М.[1], к. ф.-м. н., доц.

Термопружний аналіз шаруватих циліндричних оболонок з теплообміном

Для шаруватих ортотропних циліндричних оболонок антисиметричної структури записано рівняння руху і теплопровідності з відповідними граничними і початковими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок динамічної задачі термопружності для кінцевої шарнірно обпертої по краях оболонки за умови конвективного теплообміну з довкіллям.

Ключові слова: шарувата оболонка, термопружність, теплообмін.

[1] Українська академія друкарства,
79020, м. Львів, вул. Підголоско, 19
e-mail: flyachok@ukr.net

V. M. Flyachok[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Thermoelastic analysis of laminated cylindrical shells with convection

For layered orthotropic cylindrical shells of antisymmetrical structure, equations of motion and heat conduction with appropriate boundary conditions are derived. Solution of dynamic thermoelastic problem for finite simply supported shell with convection is obtained with making use of the integral Fourier and Laplace transformations.

Key Words: layered shell, thermoelasticity, convection.

[1] Ukrainian Academy of Printing,
79020, L'viv, Pidgolosko str., 19
e-mail: flyachok@ukr.net

Композитні оболонки, як важливі елементи багатьох сучасних конструкцій в процесі експлуатації часто піддаються нестаціонарному нагріванню, що може викликати відповідну динамічну реакцію. Тому важливо дослідити їхній напружено-деформований стан і динамічні характеристики. Відомі з літератури дослідження динамічної поведінки оболонок при нестаціонарному нагріванні проводилися, в основному, для однорідних ізотропних конструкцій [1-3]. Аналогічні дослідження для композитних і суттєво анізотропних конструкцій проводились недостатньо [4-5].

У цій роботі досліджується напружено-деформований стан кругової циліндричної оболонки шаруватої антисиметричної структури за умови конвективного теплообміну між лицевими поверхнями оболонки та довкіллям.

Постановка задачі та метод розв'язування

Розглянемо кругову циліндричну оболонку зі сталою товщиною $2h$ і довжиною l, складену зі скінченої кількості ідеально скріплених між собою однакових тонких ортотропних шарів, які антисиметрично розміщені відносно серединної поверхні. Осі ортотропії кожного шару орієнтовані під кутом 0^0 або 90^0 до осі оболонки. Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x, θ, z, де x – осьова, θ – кругова і z – радіальна координати. Початок координат помістимо у середній поверхні з радіусом R. Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за аргументами x і θ відповідно.

Нехай поверхні $z=\pm h$ оболонки нагріваються довкіллям шляхом конвективного теплообміну, а краї $x=0$ і $x=l$ підтримуються при нульовій температурі. Для дослідження термопружної поведінки такої оболонки використаємо математичну модель, яка базується на припущеннях про лінійний розподіл вектора переміщень і температури по товщині всього пакету оболонки [6]. Рівняння руху в узагальнених переміщеннях u_i, γ_i для цієї моделі запишемо в операторній формі

$$\sum_{p}^{6} L_{sp} y_p = b_s \quad (s, p = 1, 2, \dots, 6), \tag{1}$$

де $y_i = u_i$, $y_{3+i} = \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$); u_1, u_2, u_3 – переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі; γ_3 – нормальна деформація.

Диференціальні оператори L_{rk} ($L_{rk} = L_{kr}$) і вільні члени b_r системи (1) мають вигляд

$$L_{11} = A_{11}\partial_{11}^2 + (A_{66}/R^2)\partial_{22}^2 - \rho_1\partial_{\tau\tau}^2,$$

$$L_{12} = [(A_{12} + A_{66})/R]\partial_{12}^2,$$

$L_{13} = (A_{12}/R)\partial_1, \quad L_{14} = B_{11}\partial_{11}^2,$

$L_{15} = 0, \; L_{16} = A_{13}\partial_1,$

$L_{22} = A_{66}\partial_{11}^2 + (A_{22}/R^2)\partial_{22}^2 - k' A_{44}/R^2 - \rho_1\partial_{\tau\tau}^2,$

$L_{23} = [(A_{22} + k'A_{44})/R^2]\partial_2, \quad L_{24} = 0,$

$L_{25} = (B_{22}/R^2)\partial_{22}^2 + k'A_{44}/R - \rho_2\partial_{\tau\tau}^2,$

$L_{26} = [(B_{22} + k'B_{44})/R^2 + A_{23}/R]\partial_2,$

$L_{33} = -k'A_{55}\partial_{11}^2 - (k'A_{44}/R^2)\partial_{22}^2 + A_{22}/R^2 + \rho_1\partial_{\tau\tau}^2,$

$L_{34} = -k'A_{44}\partial_1, \quad L_{35} = (B_{22}/R^2 - k'A_{55}/R)\partial_2,$

$L_{36} = A_{23}/R - k'B_{44}\partial_{11}^2 + [(B_{22} - k'B_{55})/R^2]\partial_{22}^2 + \rho_2\partial_{\tau\tau}^2,$

$L_{44} = D_{11}\partial_{11}^2 + (D_{66}/R^2)\partial_{22}^2 - k'A_{44} - \rho_3\partial_{\tau\tau}^2,$

$L_{45} = [(D_{12} + D_{66})/R]\partial_{12}^2,$

$L_{46} = (D_{12}/R + B_{13} - k'B_{44})\partial_1,$

$L_{55} = D_{66}\partial_{11}^2 + (D_{22}/R^2)\partial_{22}^2 - k'A_{55} - \rho_3\partial_{\tau\tau}^2,$

$L_{56} = [D_{22}/R^2 + (B_{23} - k'B_{55})/R]\partial_2,$

$L_{66} = -k'D_{44}\partial_{11}^2 - k'(D_{55}/R^2)\partial_{22}^2 + D_{22}/R^2 +$
$+ A_{33} + 2B_{23}/R + \rho_3\partial_{\tau\tau}^2,$

$b_1 = A_{11}^t\partial_1 T_1 + (B_{11}^t/h)\partial_1 T_2,$

$b_2 = (A_{22}^t/R)\partial_2 T_1 + [B_{22}^t/(hR)]\partial_2 T_2,$

$b_3 = (A_{22}^t/R)T_1 + [B_{22}^t/(hR)]T_2,$

$b_4 = B_{11}^t\partial_1 T_1 + (D_{11}^t/h)\partial_1 T_2,$

$b_5 = (B_{22}/R)\partial_2 T_1 + [D_{22}^t/(Rh)]\partial_2 T_2,$

$b_6 = (A_{33}^t + B_{22}^t/R)T_1 + [D_{22}^t/(Rh)]T_2.$

Тут

$$\left\{A_{ii}, B_{ij}, D_{ij}\right\} = \int_{-h}^{h} c_{ij}\left\{1, z, z^2\right\}dz,$$

$$\left\{A_{ii}^t, B_{ii}^t, D_{ii}^t\right\} = \int_{-h}^{h} \beta_{ii}^t\left\{1, z, z^2\right\}dz,$$

$$T_n = \frac{2n-1}{2h^n}\int_{-h}^{h} t\, z^{n-1}dz \quad (n = 1, 2),$$

$$\left\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\right\} = \int_{-h}^{h} \rho(z)\left\{1, z, z^2\right\}dz,$$

$$\beta_{ii}^t(z) = c_{i1}\alpha_{11}^t + c_{i2}\alpha_{22}^t + c_{i3}\alpha_{33}^t,$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$c_{ij}(z)$ – коефіцієнти пружності; $\alpha_{jj}^t(z)$ – коефіцієнти теплового лінійного розширення; t – приріст температури; $\rho(z)$ – густина матеріалу; k' – коефіцієнт зсуву. Інші позначення взяті з роботи [6].

Інтегральні характеристики температури T_1, T_2 що входять у вільні члени системи (1), повинні бути визначені з рівнянь теплопровідності

$$\Delta_{(1)}T_1 + \Delta_{(2)}T_2 + [\Lambda_{33}^{(1)}/(Rh)]T_2 - C^{(1)}\partial_\tau T_1 - C^{(2)}\partial_\tau T_2 = \varepsilon_1^t(T_1 - t_1^c) + \varepsilon_2^t(T_2 - t_2^c),$$

$$\Delta_{(2)}T_1 + \Delta_{(3)}T_2 - [\Lambda_{33}^{(1)}/h^2]T_2 + [\Lambda_{33}^{(2)}/(hR)]T_2 - C^{(2)}\partial_\tau T_1 - C^{(3)}\partial_\tau T_2 = \varepsilon_2^t(T_1 - t_1^c) + \varepsilon_1^t(T_2 - t_2^c), \qquad (2)$$

де

$$\Delta_{(k)} = \Lambda_{11}^{(k)}\partial_{11}^2 + \Lambda_{22}^{(k)}\partial_{22}^2,$$

$$\{\Lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}\} = \int_{-h}^{h} \{\lambda_{ij}, c_\varepsilon\}\left(z/h\right)^{k-1}dz,$$

$$\varepsilon_n^t = \alpha_z^+ - (-1)^n\alpha_z^-; \quad t_n^c = \left(t_c^+ - (-1)^n t_c^-\right)/2,$$

$\lambda_{ij}(z)$ – коефіцієнти теплопровідності; $c_\varepsilon(z)$ – питома об'ємна теплоємність; $\alpha_z^\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$; $t_c^\pm$ – температура довкілля.

Для однозначності розв'язку систем рівнянь руху (1) і теплопровідності (2) задамо такі граничні умови на краях $x = 0$ і $x = l$:

$$u_3 = u_2 = \gamma_3 = \gamma_2 = N_{11} = M_{11} = T_1 = T_2 = 0 \qquad (3)$$

і однорідних початкових умов.

Починаючи з часу $\tau = 0$, зовнішня поверхня $z = h$ нагрівається довкіллям з температурою

$$t_c^+(x, \theta, \tau) = t^* t_c(x, \theta)t^+(\tau),$$

а внутрішня поверхня $z = -h$ омивається довкіллям з нульовою температурою. Припустимо, що коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$ рівні між собою: $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$. Тут $t^* = \mathrm{const}$, а функції $t_c(x, \theta)$ і $t^+(\tau)$ визначають спосіб розподілу температури довкілля від координат і часу відповідно. Зокрема, у випадку рівномірного розподілу температури t^* по прямокутній області ($2d \times 2\eta$) з центром в точці (x_0, θ_0), функція координат набирає вигляду

$$t_c(x, \theta) = N(x)N(\theta),$$

а у випадку косинусоїдного розподілу маємо

$$t_c(x, \theta) = \cos\frac{\pi}{2d}(x - x_0)\cos\frac{\pi}{2\eta}(\theta - \theta_0)N(x)N(\theta).$$

Тут

$$N(x) = S_-(x - (x_0 - d)) - S_+(x - (x_0 + d)),$$

$$N(\theta) = S_-(\theta - (\theta_0 - \eta)) - S_+(\theta - (\theta_0 + \eta)),$$

де одиничні функції $S_\pm(x)$ мають вигляд

$$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \quad S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Розглянемо тепер декілька можливих випадків залежності температури довкілля від часу $t^+(\tau)$.

1. Температура довкілля раптово піднімається до значення t^*, залишаючись надалі сталою:

$$t^+(\tau) = t^* S_+(\tau).$$

2. Температура довкілля раптово піднімається до значення t^*, залишаючись сталою лише протягом відрізка часу $0 < \tau \le \tau_*$, а потім раптово падає до нуля:

$$t^+(\tau) = t^*\left[S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)\right].$$

3. Температура довкілля змінюється по експоненціальному закону

$$t^+(\tau) = t^*(a + b\exp(-k\tau)),$$

де a, b, k – сталі.

4. Температура довкілля протягом відрізка $0 < \tau \le \tau_*$ змінюється по закону синуса

$$t^+(\tau) = t^* \sin(\pi\tau/\tau^*)[S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)].$$

Розв'язок систем диференціальних рівнянь (1) і (2) знаходимо методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами x, θ і методом інтегрального перетворення Лапласа за часом τ відповідно до граничних умов (3) і однорідних початкових умов.

Аналіз числових результатів та висновки

Числові дослідження проводили для шаруватих циліндричних оболонок антисиметричної структури, а також однорідної оболонки (нескінчена кількість шарів). За матеріал шарів взято графітоепоксидний композит армований волокнами з такими фізико-механічними параметрами:

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0{,}25\lambda_{11};$$

$$\nu_{21} = \nu_{31} = 0{,}25; \; E_2 = E_3 = (0{,}1; 0{,}05; 0{,}025)E_1;$$

$$\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = (15; 20)\alpha_{11}^t; \; G_{12} = G_{13} = 0{,}5E_2;$$

$$G_{23} = 0{,}2E_2.$$

Тут індексом 1 позначено властивості матеріалу у напрямку вздовж волокон, а індексами 2, 3 – у перпендикулярному напрямку. Геометричні параметри визначалися відношеннями $h/R = 0{,}05$; $l/R = 3$; $d/l = 0{,}25$; $\eta = \pi/4$.

В таблиці 1 наведені значення максимальних безрозмірних прогинів $\bar{w} = w/(R\alpha_{11}^t t^*)$, напружень $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/(E_1\alpha_{11}^t t^*)$, зусиль $\bar{N}_i = N_i/(E_1 h\alpha_{11}^t t^*)$ та моментів $\bar{M}_i = M_i/(E_1 h^2\alpha_{11}^t t^*)$, обчислених у центрі прямокутної області нагріву, за різних відношень модулів пружності E_1/E_3, коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$ та різних значень безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі Bi.

Із аналізу числових результатів і таблиці 1 слідує, що прогини шаруватих оболонок більші, а напруження менші, ніж відповідні прогини і напруження однорідної оболонки, що є наслідком меншої ефективної жорсткості неоднорідної оболонки. Величина цих відмінностей суттєво залежить від ступеня анізотропії матеріалу, кількості шарів в оболонці та значення коефіцієнта тепловіддачі (коефіцієнта Біо) – зі зменшенням кількості шарів, збільшенням ступеня анізотропії та збільшенням коефіцієнта тепловіддачі ця різниця зростає. Наприклад, різниця в межах розглянутих параметрів між прогинами двошарової ($0^0/90^0$) та однорідної оболонок при $E_1/E_3 = 40$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 20$ і $Bi = 1$ дорівнює 3%, а при $Bi = 10$ ця різниця вже дорівнює 12%. Неоднорідність та анізотропія матеріалу можуть суттєво змінювати не лише кількісну картину напруженого стану, але і якісну – за деяких значень фізико-механічних параметрів напруження можуть поміняти знак. Температурне поле слабо чутливе до неоднорідності матеріалу, але, як і напруження, суттєво залежить від коефіцієнта тепловіддачі.

Безрозмірні прогини, напруження, зусилля і моменти двошарової та однорідної оболонок

Таблиця 1

$\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$		15	20	15	20	15	20	15	20
$Bi \rightarrow$		$Bi = 1$		$Bi = 10$		$Bi = 1$		$Bi = 10$	
$E_1/E_3 \downarrow$		двошарова ($0^0/90^0$)				однорідна			
$\overline{w}$	10	1,486	1,790	1,792	2,201	1,451	1,762	1,712	2,088
	20	0106	1,152	1,326	1,569	0,996	1,149	1,224	1,420
	40	0,788	0,863	1,062	1,208	0,773	0,838	0,981	1,076
$\overline{\sigma}_1$	10	0,124	0,222	-0,0434	0,0499	0,160	0,252	-0,0260	0,0365
	20	0,00915	0,0651	-0,140	-0,0829	0,0549	0,106	-0,0789	-0,0410
	40	-0,0468	-0,0128	-0,186	-0,149	-0,0557	0,0214	-0,110	-0,0884
$\overline{\sigma}_2$	10	-0,546	-0,737	-0,746	-1,003	-0,530	-0,714	-0,729	-0,980
	20	-0,284	-0,384	-0,382	-0,515	-0,278	-0,375	-0,377	-0,506
	40	-0,145	-0,196	-0,194	-0,261	-0,143	-0,192	-0,192	-0,258
$\overline{N}_1$	10	0,0212	0,0265	0,0546	0,0700	0,0193	0,0235	0,0426	0,0525
	20	0,0114	0,0177	0,0298	0,0373	0,0122	0,0139	0,0234	0,0272
	40	0,00866	0,0102	0,0150	0,0182	0,00723	0,00766	0,0127	0,0139
$\overline{M}_1$	10	-0,485	-0,649	-0,630	-0,837	-0,143	-0,179	-0,279	-0,350
	20	-0,260	-0,347	-0,336	-0,444	-0,0846	-0,103	-0,166	-0,200
	40	-0,137	-0,181	-0,178	-0,233	-0,0557	-0,0636	-0,108	-0,124
$\overline{N}_2$	10	-0,00675	-0,0107	0,00111	0,000943	0,0184	0,0222	0,0315	0,0385
	20	-0,00265	-0,00465	0,00219	0,00134	0,00919	0,0102	0,0175	0,0201
	40	0,000104	0,000642	0,00341	0,00331	0,00438	0,00417	0,0100	0,0107
$\overline{M}_2$	10	0,208	0,287	0,0733	0,112	-0,0362	-0,0386	-0,164	-0,198
	20	0,118	0,164	0,0480	0,0735	0,00234	0,0128	-0,0743	-0,0791
	40	0,0667	0,0931	0,0287	0,0453	0,0196	0,0358	-0,0314	-0,0226

Список використаних джерел

1. *Ya. S. Podstrigach, R. N. Shvets*. Thermoelasticity of Thin Shells. – Kiev: Naukova dumka, 1978. – 344 p. (in Russian).
2. *Keene F. W., Hetnarsky R. B.* Bibliography on thermal stresses in shells // J. Thermal Stresses. – 1990. – **13**, No 4. – P. 341-531.
3. *Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krysko A. V.* Thermo-Dynamics of plates and shells. (foundations of engineering mechanics). – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. – 2010. – 789 p.
4. *Brishetto S., Carrera E.* Heat conduction and thermal analysis in multilayered plates and shells // Mechanics Research Communications. – 2011. – **38**, No. 6. – P. 449-455.
5. *Ootao Y., Tanigawa Y.* Transient thermal stresses of cross-ply laminated cylindrical shells using a higher-order shear deformation theory // J. Thermal stresses. – 2010. – **33**, No 1. – P. 55-77.
6. *Kushnir R. M., Nykolyshyn M. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M.* Modeling of thermoelastic processes in heterogeneous anisotropic shells with initial deformations // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – **178**, No 5. – P. 512-530.

Надійшла до редколегії 31.03.13