

УДК 539.3

Шворак М. А.<sup>1</sup>, аспірант

### Термонапружений стан товстостінного циліндра скінченної довжини у випадку гладкого контакту

Отримано аналітичний розв'язок осесиметричної задачі термопружності для товстостінного циліндра, що відповідає наперед заданому температурному розподілу. Термопружний потенціал знайдений за допомогою методу Фур'є. Розв'язок рівнянь Ламе знайдений як комбінація таких розв'язків, що задовільняють граничні умови окремо на кожній координатній поверхні.

Ключові слова: термопружність, скінченний циліндр, метод суперпозиції.

<sup>1</sup> Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4 е  
e-mail: mshvorak@gmail.com

В даній роботі розглядається осесиметрична задача термопружності для порожнистого кругового циліндра скінченної довжини. Температурне поле циліндра є наперед заданим. Механічні характеристики матеріалу циліндра не залежать від температури.

#### Постановка задачі

Розглянемо пружний циліндр, внутрішній радіус якого рівний  $\varepsilon$ , а зовнішній, не зменшуючи загальності,  $-1$ , довжина циліндра рівна  $2h$ . В циліндрі сформоване стаціонарне осесиметричне температурне поле  $T = T(r, z)$ , де  $r$  – радіальна, а  $z$  – осьова координата циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром. Торці циліндра розташовані в площинах  $z = \pm h$ . Вважається, що температурне поле симетричне відносно площини  $z = 0$ , тобто  $T(r, z) = T(r, -z)$ . Крім того, вважається, що в процесі температурного деформування торці залишаються плоскими і вільними від дотичних напружень, а бічні поверхні – і від дотичних, і від нормальних напружень. Іншими словами, можна вважати, що розглядається задача про температурне навантаження циліндра, затиснутого між двома плоскими абсолютно твердими гладкими поверхнями.

У відповідності до [1] розв'язок сформульованої задачі будемо шукати у вигляді

М. А. Shvorak<sup>1</sup>, PhD student

### Thermostressed state of thick-walled cylinder of finite length in the case of smooth contact

The analytical solution of axially symmetric problem of thermo elasticity for thick wall cylinder, that corresponds to given temperature distribution, is received. Thermoelastic potential is found with the help of Fourier method. The solution of Lamé equations is found as the combination of such solutions that satisfy boundary conditions separately on each coordinate surface.

Key Words: thermoelasticity, finite length cylinder, superposition method.

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e  
e-mail: mshvorak@gmail.com

$$\vec{u} + \text{grad } \Phi,$$

де термопружний потенціал  $\Phi$  є частинним розв'язком рівняння

$$\Delta \Phi = \frac{m+1}{m-1} \alpha T, \quad (1)$$

а вектор переміщень  $\vec{u}$  – розв'язком однорідного рівняння Нав'є

$$\Delta \vec{u} + \frac{m}{m-2} \text{grad div } \vec{u} = 0, \quad (2)$$

що утримує достатню довільність для задоволення наступних граничних умов:

$$\sigma_r + \sigma_r^{(T)} = 0 \quad (r = \varepsilon, 1), \quad (3)$$

$$\tau_{rz} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad (r = \varepsilon, 1), \quad (4)$$

$$w = 0 \quad (z = h), \quad (5)$$

$$\tau_{rz} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad (z = h). \quad (6)$$

В (1) – (6) введені наступні позначення:  $m$  – число Пуассона,  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення,  $\sigma_r$  – радіальні напруження,  $\tau_{rz}$  – дотичні напруження,  $w$  – переміщення вздовж осі  $z$ , індексом  $(T)$  позначені складові, що відповідають термопружному потенціалу. Враховуючи симетрію, наявну в задачі, граничні умови (3) – (6) записані лише для верхньої половини циліндра, рівновагу якої і будемо розглядати.

### Побудова розв'язків основних рівнянь

Частковий розв'язок рівняння (2) знайдемо шляхом розкладу температури по повній системі функцій, які в свою чергу можуть бути знайдені за допомогою методу Фур'є для однорідного рівняння, тобто:

$$\alpha T = b_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(z) N_0(\lambda_j r), \quad (7)$$

де

$$N_0(\lambda_j r) = J_1(\lambda_j) Y_0(\lambda_j r) - Y_1(\lambda_j) J_0(\lambda_j r),$$

$$b_0(z) = \frac{2}{1-\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^1 \alpha T r dr,$$

$$b_j(z) = \frac{1}{D_0(\lambda_j, \varepsilon)} \int_{\varepsilon}^1 \alpha T N_0(\lambda_j r) r dr,$$

$$D_0(\lambda_j, \varepsilon) = \frac{1}{2} [N_0^2(\lambda_j) - \varepsilon^2 N_0^2(\lambda_j \varepsilon)],$$

$J_i, Y_i$  – функції Бесселя 1-го та 2-го роду,  $\lambda_j$  – корені рівняння  $J_1(\lambda_j) Y_1(\lambda_j \varepsilon) - Y_1(\lambda_j) J_1(\lambda_j \varepsilon) = 0$ .

Підставивши (7) в (1), знаходимо

$$\Phi(r, z) = \frac{m+1}{m-1} \left\{ \int_0^z (z-\xi) b_0(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_0(\lambda_j r)}{\lambda_j} \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_0^z b_j(\xi) \operatorname{sh} \lambda_j (z-\xi) d\xi - \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \int_0^h b_j(\xi) \operatorname{ch} \lambda_j (h-\xi) d\xi \right] \right\}.$$

Розв'язок рівняння (2) записується у вигляді суми розв'язків для шару в циліндричних координатах [4] та нескінченного циліндра [2]:

$$u = \frac{A_0}{r} + B_0 r - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_j \operatorname{ch} \lambda_j z + \frac{3m-4}{m\lambda_j} C_j \operatorname{ch} \lambda_j z + \right. \\ \left. + C_j z \operatorname{sh} \lambda_j z \right\} N_1(\lambda_j r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Gamma_1(k_n r) + r Q_0(k_n r) - \right. \\ \left. - \frac{4}{k_n} \frac{m-1}{m} Q_1(k_n r) \right\} \cos k_n z, \\ w = D_0 z + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_j \operatorname{sh} \lambda_j z + C_j z \operatorname{ch} \lambda_j z \right\} N_1(\lambda_j r) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Gamma_0(k_n r) + r Q_1(k_n r) \right\} \sin k_n z, \quad (8)$$

де

$$\Gamma_0(k_n r) = \gamma_n I_0(k_n r) + \delta_n K_0(k_n r),$$

$$Q_0(k_n r) = q_n I_0(k_n r) + p_n K_0(k_n r),$$

$$\Gamma_1(k_n r) = \frac{1}{k_n} \frac{d}{dr} \Gamma_0(k_n r), \quad Q_1(k_n r) = \frac{1}{k_n} \frac{d}{dr} Q_0(k_n r),$$

$$N_1(\lambda_j r) = -\frac{1}{\lambda_j} \frac{d}{dr} N_0(\lambda_j r), \quad k_n = \frac{n\pi}{h},$$

$A_0, B_0, C_0, D_0, A_j, C_j, \gamma_n, \delta_n, p_n, q_n$  – довільні сталі.

Напруження, що відповідають переміщенням (8), знаходяться з виразів [3]:

$$\frac{1}{2G} \sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{m-2} e, \quad \frac{1}{2G} \sigma_\theta = \frac{1}{r} u + \frac{1}{m-2} e,$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{m-2} e, \quad \frac{1}{2G} \tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Підставивши вирази для дотичних напружень у граничні умови (4) та (6) та використавши (5), отримаємо

$$A_j = C_j = 0,$$

$$k_n \Gamma_1(k_n) = -k_n Q_0(k_n) + 2 \frac{m-1}{m} Q_1(k_n), \quad (9)$$

$$k_n \Gamma_1(k_n \varepsilon) = -k_n \varepsilon Q_0(k_n \varepsilon) + 2 \frac{m-1}{m} Q_1(k_n \varepsilon).$$

Використовуючи співвідношення (9), граничні умови (3) та виконавши перетворення аналогічні до [1], приходимо до співвідношень

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{mB_0 + D_0}{m-2} - \frac{A_0}{\varepsilon^2} &= \frac{1}{h} \frac{m+1}{m-1} \int_0^h b_0(\xi) d\xi, \\ \frac{mB_0 + D_0}{m-2} - A_0 &= \frac{1}{h} \frac{m+1}{m-1} \int_0^h b_0(\xi) d\xi, \\ D_0 &= -\frac{1}{h} \frac{m+1}{m-1} \int_0^h b_0(\xi) d\xi, \\ z_n (a_n b_n - d_n^2) &= a_n \Psi_{2n}(-1)^n - d_n \Psi_{1n}(-1)^n, \\ y_n (a_n b_n - d_n^2) &= b_n \Psi_{1n}(-1)^n - d_n \Psi_{2n}(-1)^n, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

де використані наступні позначення:

$$\Psi_{1n} = \frac{2}{h} \frac{m+1}{m-1} \int_0^h b_0(\xi) \cos k_n \xi d\xi + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_0(\lambda_j)}{j} \times \\ \times \frac{k_n^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} \int_0^h b_j(\xi) \cos k_n \xi d\xi,$$

$$a_n = \frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} - 1 - \frac{2}{k_n^2} \frac{m-1}{m} - \frac{1}{k_n^2 \Delta^2}, \quad d_n = \frac{\Delta_1}{k_n \varepsilon \Delta^2} - \frac{\Delta_2}{k_n \Delta^2},$$

$$b_n = 1 - \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} + \frac{2}{(k_n \varepsilon)^2} \frac{m-1}{m} - \frac{1}{(k_n \varepsilon)^2 \Delta^2},$$

$$y_n = -(-1)^n k_n Q_1(k_n), \quad z_n = (-1)^n k_n \varepsilon Q_1(k_n \varepsilon),$$

$$\Delta = K_1(k_n \varepsilon) I_1(k_n) - K_1(k_n) I_1(k_n \varepsilon),$$

$$\Delta_1 = K_1(k_n \varepsilon) I_0(k_n) + K_0(k_n) I_1(k_n \varepsilon),$$

$$\Delta_2 = K_1(k_n) I_0(k_n \varepsilon) + K_0(k_n \varepsilon) I_1(k_n).$$

Розв'язавши систему (10), отримаємо значення всіх невідомих сталих.

### Результати розрахунків

Наведений аналітичний розв'язок порівнювався з чисельним, одержаним за допомогою методу

скінченних елементів, для наступних значень параметрів:  $m=10/3$ ,  $\varepsilon=0.5$ ,  $h=1.5$ ,  $\alpha=16 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $T(r, z)=100(r+z^2)$ . Відхилення в полях зміщень склали порядку 2%. На рис. 1-3 наведено розподіли полів відповідних напружень по поперечним перерізам циліндра. Звертає на себе увагу той факт, що максимальні дотичні напруження знаходяться на деякій відстані від торця циліндра.

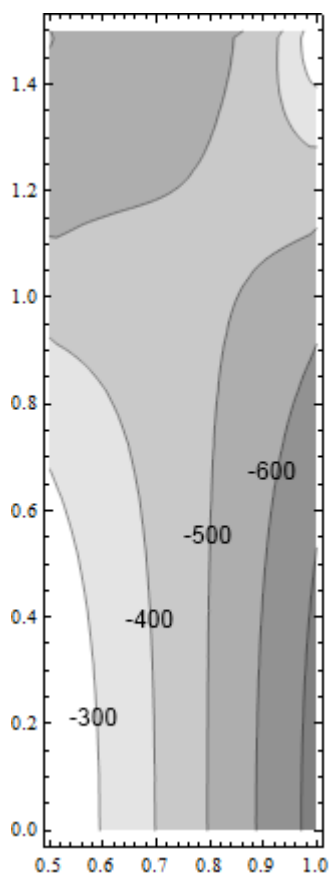


Рис. 1.  $\sigma_0$ , МПа

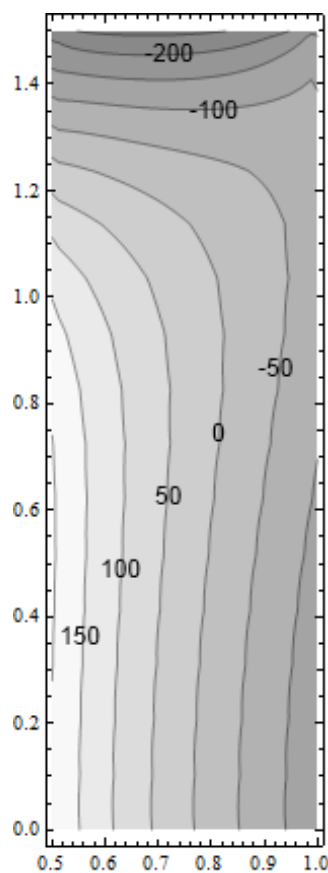


Рис. 2.  $\sigma_z$ , МПа

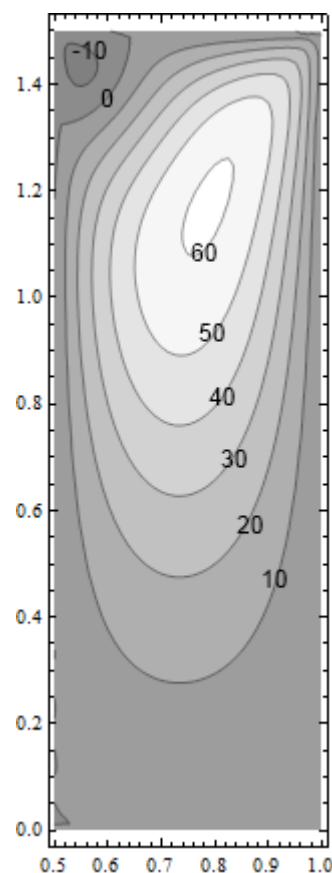


Рис. 3.  $\tau_{xy}$ , МПа

### Список використаних джерел

1. Grinchenko V. T. Thermal stress state of thick-walled cylinder of finite length // Thermal stresses in structural elements. – 1967. – N 7. – P. 147-154. (in Russian).
2. Lure A. I. Three-dimensional problems of the theory of elasticity – Moscow: State publishing technical and theoretical literature, 1955 – 492 p. (in Russian).
3. Nowacki W. Thermoelasticity – Moscow: Mir, 1975 – 872 p. (in Russian).
4. Ulitko A. F. The method of vector eigenfunctions in three-dimensional problems of elasticity theory. – Kyiv: Naukova dymka, 1979. – 264 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 16.05.13