

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

Власюк А.П.¹, д.т.н., проф.,
Федорчук Н.А.², аспірант

Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення

В статті сформульовано постановку та проведено математичне моделювання задачі напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під плоским флютбетом в процесі тепло-масоперенесення. Отримано числовий розв'язок відповідної двовимірної крайової задачі методом скінченних різниць. Як приклад, досліджено задачу зміни напружено-деформованого стану ґрунтової основи прямокутної форми. Використовуючи створене програмне забезпечення, проведено серію числових експериментів та їх аналіз.

Ключові слова: напружено-деформований стан, гідротехнічний об'єкт, тепло-масоперенесення, метод скінченних різниць.

¹ Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

² Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: N.A.Fedorchuk@mail.ru

A.P. Vlasyuk¹, Doctor of science, prof.,
N.A.Fedorchuk², PhD student

Mathematical modelling of stressed deformed state of soil base of hydrotechnical object under heat-mass transfer

In the article was formulated the statement and carried out the mathematical modelling of problems of stressed deformed state (SDS) of soil base of hydrotechnical object under flat flood bed during heat-mass transfer. There is obtained the numerical solution of respective two-dimensional boundary value problem by the method of finite differences. As an example, the SDS change of rectangular form soil base problem has been investigated. Using created software a series was conducted of numeral experiments and their analysis.

Key words: stressed deformed state, hydrotechnical object, heat-mass transfer, method of finite differences.

¹ National University of Water Management and Nature Resources Use, Soborna, 11, Rivne, 33000, Ukraine

e-mail: A.P.Vlasyuk@rambler.ru

² National University of Water Management and Nature Resources Use, Soborna, 11, Rivne, 33000, Ukraine

e-mail: N.A.Fedorchuk@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. Важливим етапом при проектуванні будь-якого гідротехнічного об'єкта (ГТО), його будівництві та подальшій експлуатації є врахування деформаційних властивостей ґрунтових основ та гідрогеологічних процесів, що відбуваються в таких ґрунтах. Зокрема, під дією процесів фільтрації підземних вод, масоперенесення, теплоперенесення та ін. може значно змінюватись напружено-деформований стан (НДС) ґрунтових масивів, а відповідно – призвести до осідання земної поверхні та виникнення аварійних ситуацій.

Розв'язанням задачі НДС ґрунтових масивів займались наступні вчені: Сергієнко І.В., Скопєцький В.В., Дейнека В.С., Власюк А.П.,

Катерина Є.І., Кузло М.Т., Філатова І.А. та ін. [1-11]. Однак, в їхніх роботах не враховувався тепловий режим ґрунту, зокрема фільтрація підземних вод в неізотермічних умовах та тепло-масоперенесення.

Тому актуальною є задача дослідження НДС ґрунтових основ ГТО в процесі тепло-масоперенесення.

2. Постановка задачі. Розглянемо ґрунтову основу гідротехнічного об'єкта під плоским флютбетом, що займає область $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ (див. рис.1). Флютбет E_1E_2 описується рівнянням межі $y = 0$, $x \in [l_1^1, l_1^2]$, $0 < l_1^1 < l_1^2 < l_1$.

Грунтова основа вважається пружно-деформівною в межах лінійної теорії пружності з пружними параметрами (коефіцієнтами Ламе) $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$, які залежать від концентрації сольового розчину та температури. На ґрунт діє сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

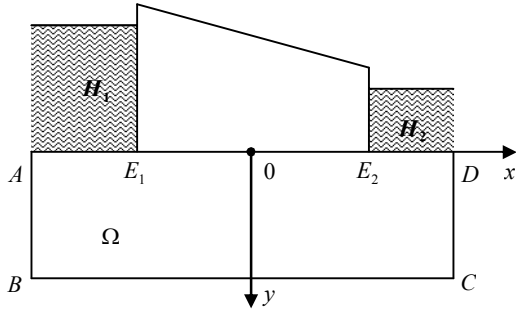


Рис.1. НДС ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення

Задані значення п'єзометричних напорів \tilde{H}_1 , \tilde{H}_2 , температур \tilde{T}_1 та \tilde{T}_2 у верхньому (AE_1) та нижньому (E_2D) б'єфах відповідно, причому $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$. У верхньому б'єфі задано значення концентрації солей \tilde{C}_1 , а у нижньому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напорів, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процес фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

ГТО вважається непроникним. Відповідно процеси фільтрації підземних вод відбуваються в ґрунтовій основі під флютбетом E_1E_2 .

Потрібно розрахувати зміну напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флютбетом в процесі тепло-масоперенесення.

3. Математична модель задачі. Математичну модель задачі НДС ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флютбетом у процесі тепло-масоперенесення в двовимірному випадку можна описати наступною крайовою задачею [1-11]:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T)\Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \\ & + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T\frac{\partial T}{\partial x} = X, \\ & \mu(c, T)\Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \\ & + \left[\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] - (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T\frac{\partial T}{\partial y} = Y, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T)\nabla c) - \mathbf{v}\nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) = n_p\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T\nabla T) - \rho c_p\mathbf{v}\nabla T = c_T\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T)\nabla h + \mathbf{v}_c(c)\nabla c + \mathbf{v}_T\nabla T, \quad \text{div}\mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{ABCD \cup E_1E_2} = 0, \quad h|_{AE_1} = \tilde{H}_1, \quad h|_{E_2D} = \tilde{H}_2, \quad (5)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{ABCD \cup E_1E_2} = 0, \quad c|_{AE_1} = \tilde{C}_1, \quad \frac{\partial c}{\partial y}|_{E_2D} = 0, \quad (6)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{ABCD \cup E_1E_2} = 0, \quad T|_{AE_1} = \tilde{T}_1, \quad T|_{E_2D} = \tilde{T}_2, \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c, T)\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T, \quad (8)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p\mathbf{v}T - \lambda_T\nabla T, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

$$U = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (x, y) \in AB \cup CD, \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in BC \cup E_1E_2, \quad (11)$$

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad (x, y) \in AE_1 \cup E_2D, \quad (12)$$

$$c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = \tilde{T}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (12)$$

де $\mathbf{u} = (U, V)$ – вектор зміщень; $c(x, y, t)$ – концентрація сольового розчину; $T(x, y, t)$ – температура; $h(x, y, t)$ – п'єзометричний напір; \mathbf{D} , \mathbf{D}_T , λ_T , \mathbf{K} , \mathbf{v}_c , \mathbf{v}_T – тензори відповідно коефіцієнтів конвективної дифузії, термодифузії, ефективної теплопровідності вологого ґрунту, фільтрації, хімічного та термічного осмосів; \mathbf{v} – вектор швидкості фільтрації сольового розчину в неізотермічних умовах; \mathbf{q}_c – вектор потоку розчинених солей; \mathbf{q}_T – вектор потоку тепла; \mathbf{n} – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області; X , Y – масові сили; $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$ – коефіцієнти Ламе, що залежать від концентрації фільтруючого розчину та температури; γ – константа швидкості

масообміну; C_m – концентрація граничного насичення; n_p – пористість ґрунту; ρ , c_p – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – питома теплоємність ґрунту при сталому об’ємі; $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{C}_1, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{C}_0(x, y), \tilde{T}_0(x, y)$, – задані функції; t – час.

Тут: (1) – це система рівнянь НДС ґрунтової основи гідротехнічного об’єкта під флютбетом, що знаходиться у водонасиченому стані при фільтрації підземних вод з врахуванням тепло-масоперенесення; (2), (3) описують сольовий та тепловий режими ґрунту; (4) – це рівняння фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. Крайові умови для зміщень, концентрації солей, температури, а також для напору мають вигляд (5) – (12) відповідно.

4. Числовий розв’язок крайової задачі.

Покриємо область $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, t_0]$ рівномірною сіткою $\bar{Q}^{(m_1, m_2, n_1)} = ([0; m_1 h_1] \times [0; m_2 h_2]) \times [0; n_1 \tau]$ з кроками h_1, h_2 та τ відповідно по змінних x, y та часу t , де m_1, m_2, n_1 – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для числового розв’язання поставленої двовимірної крайової задачі використаємо метод скінченних різниць [6, 7]. Запишемо різницеву схему для рівняння (1), а для рівнянь (2), (3) використаємо монотонну різницеву схему Самарського [12]. В результаті отримуємо аналог системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді системи різницевих рівнянь

$$\mu_{i_1, i_2} \left(\frac{U_{i_1+1, i_2} - 2U_{i_1, i_2} + U_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \frac{U_{i_1, i_2+1} - 2U_{i_1, i_2} + U_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} \right) + (\lambda_{i_1, i_2} + \mu_{i_1, i_2}) \frac{U_{i_1+1, i_2} - 2U_{i_1, i_2} + U_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \left(\frac{\lambda_{i_1+1, i_2} - \lambda_{i_1, i_2}}{h_1} + 2 \frac{\mu_{i_1+1, i_2} - \mu_{i_1, i_2}}{h_1} \right) \frac{U_{i_1+1, i_2} - U_{i_1, i_2}}{h_1} + \frac{\mu_{i_1, i_2+1} - \mu_{i_1, i_2}}{h_2} \frac{U_{i_1, i_2+1} - U_{i_1, i_2}}{h_2} = f_{i_1, i_2}^1(V, T),$$

$$\mu_{i_1, i_2} \left(\frac{V_{i_1+1, i_2} - 2V_{i_1, i_2} + V_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \frac{V_{i_1, i_2+1} - 2V_{i_1, i_2} + V_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} \right) + (\lambda_{i_1, i_2} + \mu_{i_1, i_2}) \frac{V_{i_1+1, i_2} - 2V_{i_1, i_2} + V_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \left(\frac{\lambda_{i_1+1, i_2} - \lambda_{i_1, i_2}}{h_2} + 2 \frac{\mu_{i_1, i_2+1} - \mu_{i_1, i_2}}{h_2} \right) \frac{V_{i_1, i_2+1} - V_{i_1, i_2}}{h_2} + \frac{\mu_{i_1+1, i_2} - \mu_{i_1, i_2}}{h_1} \frac{V_{i_1+1, i_2} - V_{i_1, i_2}}{h_1} = f_{i_1, i_2}^2(U, T),$$

$$\mu_{i_1, i_2} \left(\frac{U_{i_1+1, i_2} - 2U_{i_1, i_2} + U_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \frac{U_{i_1, i_2+1} - 2U_{i_1, i_2} + U_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} \right) + (\lambda_{i_1, i_2} + \mu_{i_1, i_2}) \frac{U_{i_1+1, i_2} - 2U_{i_1, i_2} + U_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \left(\frac{\lambda_{i_1+1, i_2} - \lambda_{i_1, i_2}}{h_1} + 2 \frac{\mu_{i_1+1, i_2} - \mu_{i_1, i_2}}{h_1} \right) \frac{U_{i_1+1, i_2} - U_{i_1, i_2}}{h_1} + \frac{\mu_{i_1, i_2+1} - \mu_{i_1, i_2}}{h_2} \frac{U_{i_1, i_2+1} - U_{i_1, i_2}}{h_2} = f_{i_1, i_2}^1(V, T),$$

$$\mu_{i_1, i_2} \left(\frac{V_{i_1+1, i_2} - 2V_{i_1, i_2} + V_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \frac{V_{i_1, i_2+1} - 2V_{i_1, i_2} + V_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} \right) + (\lambda_{i_1, i_2} + \mu_{i_1, i_2}) \frac{V_{i_1+1, i_2} - 2V_{i_1, i_2} + V_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} + \left(\frac{\lambda_{i_1+1, i_2} - \lambda_{i_1, i_2}}{h_2} + 2 \frac{\mu_{i_1, i_2+1} - \mu_{i_1, i_2}}{h_2} \right) \frac{V_{i_1, i_2+1} - V_{i_1, i_2}}{h_2} + \frac{\mu_{i_1+1, i_2} - \mu_{i_1, i_2}}{h_1} \frac{V_{i_1+1, i_2} - V_{i_1, i_2}}{h_1} = f_{i_1, i_2}^2(U, T),$$

де $f_{i_1, i_2}^1(V, T), f_{i_1, i_2}^2(U, T)$ – відомі функції, $\lambda_{i_1, i_2} = \lambda_{i_1, i_2}(c_{i_1, i_2}^{(j)}, T_{i_1, i_2}^{(j)})$, $\mu_{i_1, i_2} = \mu_{i_1, i_2}(c_{i_1, i_2}^{(j)}, T_{i_1, i_2}^{(j)})$, $i_1 = \overline{1, m_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, m_2 - 1}$, $j = \overline{0, n_1 - 1}$.

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (2) запишеться у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$n_p \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j)}}{\tau} = \frac{(\eta_1)^{(j)}}{h_1} \left((d_1)^{(j)}_{i_1+1, i_2} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (d_1)^{(j)}_{i_1, i_2} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) + \frac{(v_1^+)^{(j)}}{(D_1)^{(j)}_{i_1, i_2}} \cdot (d_1)^{(j)}_{i_1+1, i_2} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} + \frac{(v_1^-)^{(j)}}{(D_1)^{(j)}_{i_1, i_2}} \cdot (d_1)^{(j)}_{i_1, i_2} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - \frac{\gamma}{2} (c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - C_m) + \frac{1}{h_1} \left((d_T)^{(j)}_{i_1+1, i_2} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (d_T)^{(j)}_{i_1, i_2} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right)$$

$$n_p \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{\tau} = \frac{(\eta_2)^{(j)}}{h_2} \left((d_2)^{(j)}_{i_1, i_2+1} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (d_2)^{(j)}_{i_1, i_2} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) + \frac{(v_2^+)^{(j)}}{(D_2)^{(j)}_{i_1, i_2}} \cdot (d_2)^{(j)}_{i_1, i_2+1} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} + \frac{(v_2^-)^{(j)}}{(D_2)^{(j)}_{i_1, i_2}} \cdot (d_2)^{(j)}_{i_1, i_2} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} - \frac{\gamma}{2} (c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - C_m) + \frac{1}{h_2} \left((d_T)^{(j)}_{i_1, i_2+1} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (d_T)^{(j)}_{i_1, i_2} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right)$$

де

$$(d_1)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} \left((D_1)^{(j)}_{i_1, i_2} + (D_1)^{(j)}_{i_1-1, i_2} \right), \quad (d_2)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} \left((D_2)^{(j)}_{i_1, i_2} + (D_2)^{(j)}_{i_1, i_2-1} \right),$$

$$(d_T)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} \left((D_T)^{(j)}_{i_1, i_2} + (D_T)^{(j)}_{i_1-1, i_2} \right), \quad (d_T)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} \left((D_T)^{(j)}_{i_1, i_2} + (D_T)^{(j)}_{i_1, i_2-1} \right),$$

$$(\eta_3)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{1}{1 + \frac{h_{i_3} |(v_3)^{(j)}_{i_1, i_2}|}{2(D_3)^{(j)}_{i_1, i_2}}} = 1 - \frac{h_{i_3} |(v_3)^{(j)}_{i_1, i_2}|}{2(D_3)^{(j)}_{i_1, i_2}} + O(h_{i_3}^2),$$

$$(v_3^+)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{-(v_3)^{(j)}_{i_1, i_2} + |(v_3)^{(j)}_{i_1, i_2}|}{2} \geq 0, \quad (v_3^-)^{(j)}_{i_1, i_2} = \frac{-(v_3)^{(j)}_{i_1, i_2} - |(v_3)^{(j)}_{i_1, i_2}|}{2} \leq 0,$$

$$i_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad i_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad i_3 = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{0, n_1 - 1}.$$

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (3) запишеться у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$c_T \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j)}}{\tau} = \frac{(\bar{\eta}_1)^{(j)}}{h_1} \left((\bar{\lambda}_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - \right. \\ \left. - (\bar{\lambda}_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) + \rho c_p \left(\frac{(v_1^+)^{(j)}}{(\lambda_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_1})_{i_1+1, i_2}^{(j)} \times \right. \\ \times \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} + \frac{(v_1^-)^{(j)}}{(\lambda_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \left. \right) \\ c_T \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{\tau} = \frac{(\bar{\eta}_2)^{(j)}}{h_2} \left((\bar{\lambda}_{T_2})_{i_1, i_2+1}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - \right. \\ \left. - (\bar{\lambda}_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) + \rho c_p \left(\frac{(v_2^+)^{(j)}}{(\lambda_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_2})_{i_1, i_2+1}^{(j)} \times \right. \\ \times \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} + \frac{(v_2^-)^{(j)}}{(\lambda_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \left. \right), \quad (22)$$

де

$$(\bar{\lambda}_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((\lambda_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} + (\lambda_{T_1})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (\bar{\lambda}_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((\lambda_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} + (\lambda_{T_2})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right), \\ (\bar{\eta}_1)^{(j)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \rho c_p | (v_1)^{(j)} |}{2 (\lambda_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)}}} = 1 - \frac{h_1 \rho c_p | (v_1)^{(j)} |}{2 (\lambda_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)}} + O(h_1^2),$$

$i_1 = \overline{1, m_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, m_2 - 1}$, $i_3 = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, n_1 - 1}$.

Для значень компонент швидкості фільтрації отримаємо

$$(v_1)^{(j)} = -(K_1)^{(j)} \frac{h_{i_1+1, i_2}^{(j)} - h_{i_1-1, i_2}^{(j)}}{2h_1} + \\ + (v_{c_1})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j)}}{2h_1} + (v_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j)}}{2h_1}, \quad (24)$$

$$(v_2)^{(j)} = -(K_2)^{(j)} \frac{h_{i_1, i_2+1}^{(j)} - h_{i_1, i_2-1}^{(j)}}{2h_2} + \\ + (v_{c_2})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j)}}{2h_2} + (v_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j)}}{2h_2}, \quad (25)$$

$i_1 = \overline{1, m_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, m_2 - 1}$, $j = \overline{0, n_1}$.

Для знаходження наближених значень зміщень та напору з вищенаведених різницевих рівнянь використано ітераційний метод Гауса-Зейделя, а концентрації солей та температури – метод прогонки [12].

Деформації та напруження з врахуванням неізотермічного режиму в двовимірному випадку обчислюються за формулами

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \sigma_y = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \alpha_T \bar{T} \theta,$$

де $\theta = \frac{E(c, T)}{1-\nu}$, $E(c, T)$ – модуль Юнга, що залежить від концентрації сольових розчинів та температури; ν – коефіцієнт Пуассона, $\bar{T} = T - T_0$.

Відповідно їх скінченнорізницеві аналоги мають вигляд

$$(\varepsilon_x)_{i_1, i_2} = \frac{U_{i_1+1, i_2} - U_{i_1-1, i_2}}{2h_1}, \quad (\varepsilon_y)_{i_1, i_2} = \frac{V_{i_1, i_2+1} - V_{i_1, i_2-1}}{2h_2},$$

$$(\sigma_x)_{i_1, i_2} = \frac{\theta}{1+\nu} \left((\varepsilon_x)_{i_1, i_2} + \nu (\varepsilon_y)_{i_1, i_2} \right) - \alpha \bar{T}_{i_1, i_2}^{(j)} \theta,$$

$$(\sigma_y)_{i_1, i_2} = \frac{\theta}{1+\nu} \left((\varepsilon_y)_{i_1, i_2} + \nu (\varepsilon_x)_{i_1, i_2} \right) - \alpha \bar{T}_{i_1, i_2}^{(j)} \theta,$$

$i_1 = \overline{1, m_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, m_2 - 1}$, $j = \overline{0, n_1 - 1}$.

5. Результати числових експериментів. Як приклад, розглянуто двовимірну задачу НДС масиву піщаного водонасиченого ґрунту прямокутної форми товщиною $l_2 = 20$ м при $l_1 = 80$ м, $l_1^1 = 20$ м та $l_1^2 = 60$ м з наступними вхідними даними:

$$n_p = 0,4, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$c_p = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad c_T = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$D_1 = D_2 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad D_{T_1} = D_{T_2} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$\nu_{c_1} = \nu_{c_2} = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^{-5}}{\text{кг} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1},$$

$$\nu_{T_1} = \nu_{T_2} = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\lambda_{T_1} = \lambda_{T_2} = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma_{\text{за}} = 13 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\tilde{T}_1(x, t) = 30^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_2(x, t) = 15^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_3(x, t) = 5^\circ \text{C},$$

$$\tilde{H}_1(x, t) = 10 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2(x, t) = 1 \text{ м},$$

$$\tilde{C}_1(x, t) = C_m(x, t) = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$$\tilde{C}_2(x, t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in AE_1, \\ \tilde{C}_2, & (x, y) \notin AE_1; \end{cases}$$

$$\tilde{T}_0(x, y) = \begin{cases} \tilde{T}_1, & (x, y) \in AE_1, \\ \tilde{T}_2, & (x, y) \in E_2 D, \\ \tilde{T}_3, & (x, y) \notin AE_1 \cup E_2 D. \end{cases}$$

Значення залежностей $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$ та $\mathbf{K}(c, T)$ взяті аналогічно, як і в роботі [6, 13, 14].

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам.

Проведено серію числових експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при $t = 1095$ діб.

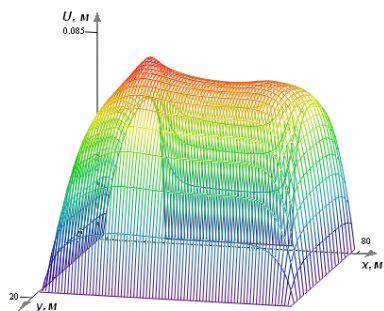


Рис.2. Графік розподілу поля зміщень по осі Ox з врахуванням тепло-масоперенесення

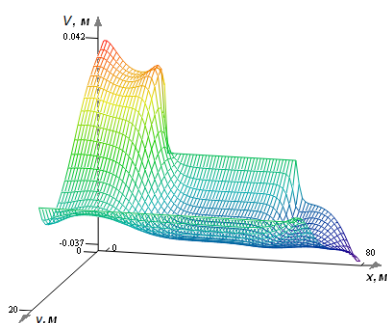


Рис.3 Графік розподілу поля зміщень по осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

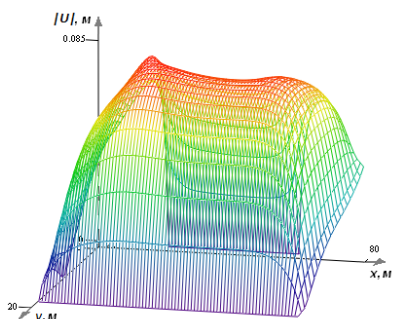


Рис.4. Графіки розподілу поля модуля зміщень з врахуванням тепло-масоперенесення

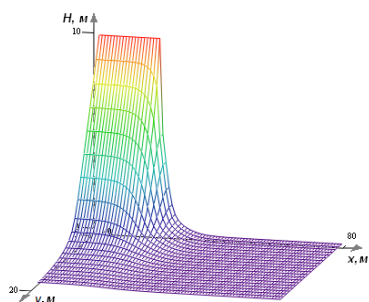


Рис.5. Графіки розподілу поля напорів з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

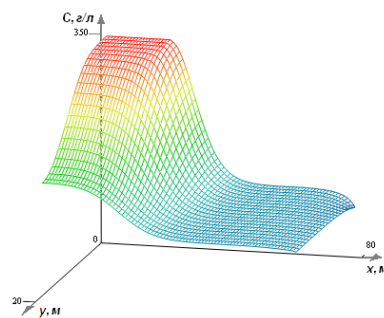


Рис.6. Графіки розподілу поля концентрації солей в неізотермічному режимі

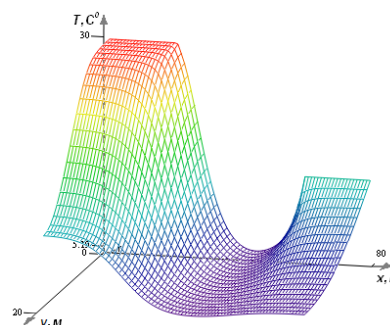


Рис.7. Графіки розподілу поля температури при фільтрації сольових розчинів

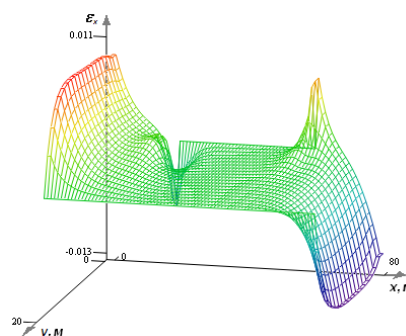


Рис.8. Графік розподілу поля деформацій по осі Ox з врахуванням тепло-масоперенесення

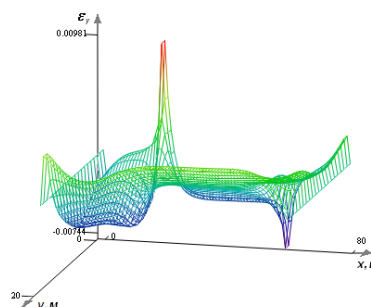


Рис.9. Графік розподілу поля деформацій по осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

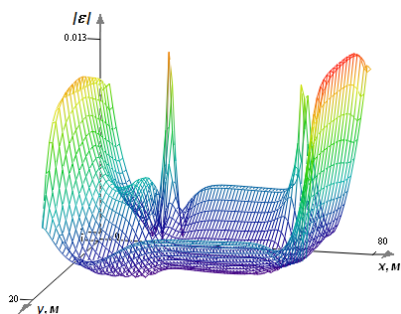


Рис. 10. Графік розподілу поля модуля деформацій з врахуванням тепло-масоперенесення

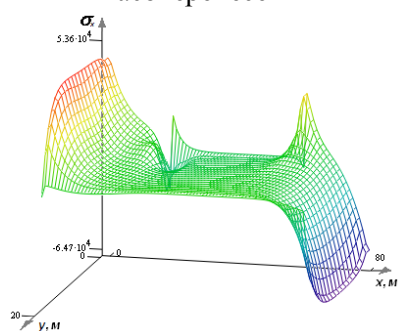


Рис. 11. Графік розподілу поля напружень по осі Ox з врахуванням тепло-масоперенесення

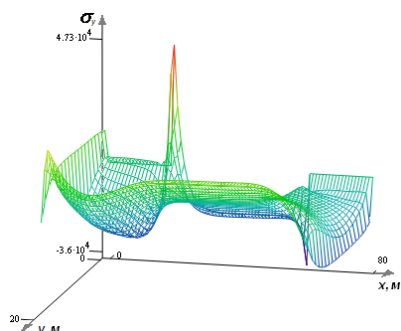


Рис. 12. Графік розподілу поля напружень по осі Oy з врахуванням тепло-масоперенесення

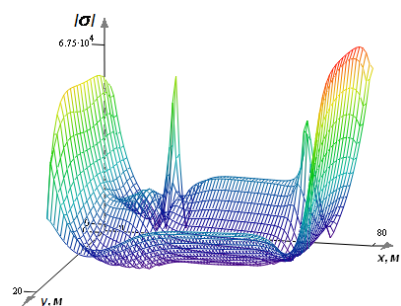


Рис. 13. Графік розподілу поля модуля напружень з врахуванням тепло-масоперенесення

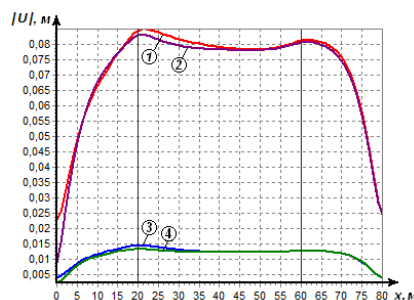


Рис. 14. Графіки розподілу поля модуля зміщень при $y = 7$ м : 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

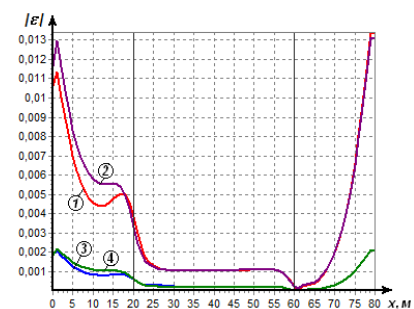


Рис. 15. Графіки розподілу поля модуля деформацій при $y = 7$ м : 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

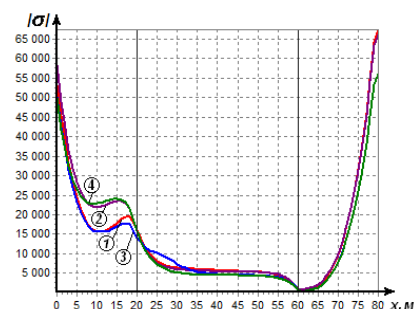


Рис. 16. Графіки розподілу поля модуля напружень при $y = 7$ м : 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

6. Висновки. В роботі сформульовано постановку та розроблено відповідну математичну модель НДС ґрунтової основи ГТО в процесі тепло-масоперенесення. Отримано числовий розв'язок поставленої крайової задачі методом скінченних різниць. Проведено ряд числових експериментів з дослідження впливу

тепло-масоперенесення на НДС ґрунтової основи ГТО. Як видно з рис. 14, при врахуванні процесів тепло-масоперенесення значно змінюється картина НДС в порівнянні ніж з врахуванням тільки масоперенесення, з врахуванням тільки теплоперенесення та без врахування впливу тепло-масоперенесення. А саме: зміщення з врахуванням процесів тепло-масоперенесення значно збільшуються у порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення. Теплоперенесення дещо впливає на розподіл поля зміщень в порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення, а також масоперенесення в неізотермічних умовах дещо збільшує розподіл поля зміщень, ніж з врахуванням масоперенесення в ізотермічних умовах.

Отримані результати можуть бути використані для оцінки стану ґрунтових основ ГТО, їх несучої здатності, прогнозування стійкості, надійності та безпеки експлуатації ГТО.

References

1. *Sergienko I.V., Skopets'kyi V.V., Deyneka V.S.* Mathematical modeling and the research of processes in non-homogeneous media. – Kyiv: Naukova Dumka, 1991. – 432p. (in Russian)
2. *Deyneka V.S.* Models and methods for solving problems with transmission conditions / *V.S. Deyneka, I.V. Sergienko, V.V. Skopets'kyi.* – Kyiv: Naukova Dumka, 1998. – 615p. (in Russian)
3. *Vlasyuk A.P.* The solution of one-dimensional stationary problem of SDS of soil masses in conditions of mass transfer / *A.P. Vlasyuk, Ye.I. Kateryna* // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Informatics, 1999. – Issue 1. – Pp. 50-55. (in Ukrainian)
4. *Vlasyuk A.P.* On some new mathematical models of underground hydrodynamics / *A.P. Vlasyuk* // Visnyk RSTU – Rivne – Issue 3(5), Part 2. – 2000. – Pp. 57-62. (in Ukrainian)
5. *Kuzlo N.T.* On some mathematical models of SDS of soil mass in the process of the movement of free surface of ground waters / *N.T. Kuzlo, I.A. Filatova* // Visnyk NUWM – Rivne, 2005. – Issue. 2(30). – Pp. 282-287. (in Ukrainian)
6. *Kuzlo N.T.* The study of the influence of the concentration of salt solutions on deformation characteristics of soils / *N.T. Kuzlo, I.A. Filatova* // Visnyk NUWM – Rivne, 2006. – Issue 4(36), Part 2. – Pp. 209-214. (in Ukrainian)
7. *Filatova I.A.* Mathematical modelling of SDS of a multi-layered soil masses at presence of a level of subsoil waters / *I.A. Filatova* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Issue. 1. – 2008. – Pp. 161-165. (in Ukrainian)
8. *Fedorchuk N.A.* Mathematical modelling of one-dimensional problem of SDS of soil layer considering mass transfer during the filtration of salt solutions under non-isothermal conditions and the availability of ground waters level / *N.A. Fedorchuk* // Mathematical and computer modelling. Series: Technical Sciences: Collection Scientific Papers – Kamianets-Podilsky: Kamianets-Podilsky Ivana Ohienko National University, 2010. – Issue 4 – Pp. 204-215. (in Ukrainian)
9. *Filatova I.A.* Mathematical modeling of stressed deformed state of soil masses under complicated hydrogeological conditions / *I.A. Filatova, N.A. Fedorchuk* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Issue. 3. – 2011. – Pp. 218-226. (in Ukrainian)
10. *Vlasyuk A.P.* Mathematical modeling of one-dimensional problem of stressed deformed state of soil mass under heat-mass transfer conditions during the filtration of salt solutions / *A.P. Vlasyuk, N.A. Fedorchuk* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Issue. 1. – 2012. – Pp. 131-136. (in Ukrainian)
11. *Kovalenko A.D.* Thermoelasticity / *A.D. Kovalenko* // Kyiv: Vyscha Shkola, 1975. – 216 p. (in Russian)
12. *Samarskii A.A.* Theory of Difference Schemes / *A.A. Samarskii* // Moscow: Nauka, 1989. – 616 p. (in Russian)
13. *Vlasyuk A.P.* Mathematical modeling of soil filtration consolidation taking into account salt and heat transfer / *A.P. Vlasyuk, P.M. Martynyuk* // National University of Water Management and Natural Resources Use, Rivne, 2008. – 416 p. (in Ukrainian)
14. *Vlasyuk A.P.* Numerical solution of problems of consolidation and filtration destruction under salt and heat transfer conditions by radial basis function method / *A.P. Vlasyuk, P.M. Martynyuk* // National University of Water Management and Natural Resources Use, Rivne, 2010. – 277 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 30.03.2013